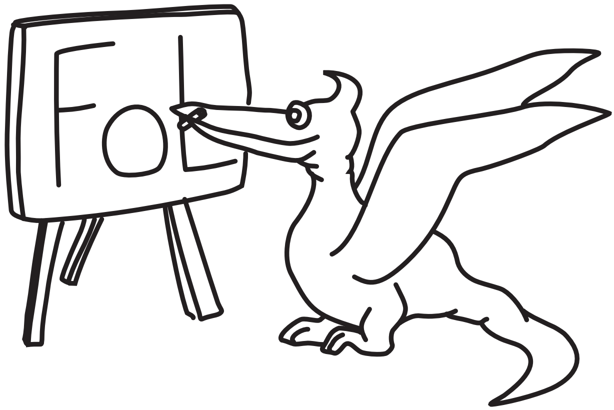
Řešení úloh 11. ročníku Fyziklání online



Úloha 1 ... nešťastný trolejbus
3 body

Trolejbus o celkové hmotnosti $M_\mathrm{t} = 15\,\mathrm{tun}$ *(bez pasažérů) a objemu* $V_\mathrm{t} = 90\,\mathrm{m}^3$ *vjíždí na most přes řeku. Na mostě ale probíhá rekonstrukce a neopatrní dělníci tam zapomněli zakázat vjezd, takže trolejbus spadne do řeky. Kolik maximálně procent objemu trolejbusu mohou tvořit pasažéři, aby po pádu vyplaval k hladině, pokud uvažujeme hustotu lidského těla stejnou jako hustotu vody? Trolejbus považujte za hermeticky uzavřený.*

Verča zaslechla, že je zájem o úlohu s trolejbusem.

Označme si hledaný poměr jako x. Výslednou hmotnost trolejbusu i s pasažéry pak můžeme zapsat jako $M_\mathrm{t} + x\rho_\mathrm{v}V_\mathrm{t}$. Pokud má trolejbus vyplavat k hladině, musí být vztlaková síla na ponořený trolejbus alespoň tak velká jako tíhová, dostáváme tedy rovnici

$$(M_\mathrm{t} + x\rho_\mathrm{v}V_\mathrm{t})\,g = V_\mathrm{t}\rho_\mathrm{v}g\,.$$

Z ní už snadno vyjádříme poměr

$$x = \frac{V_\mathrm{t}\rho_\mathrm{v} - M_\mathrm{t}}{V_\mathrm{t}\rho_\mathrm{v}} = 1 - \frac{M_\mathrm{t}}{V_\mathrm{t}\rho_\mathrm{v}}\,.$$

Po dosazení hodnot dostaneme $x \doteq 83{,}3\,\%$.

Veronika Hendrychová
vercah@fykos.cz

Úloha 2 ... naše staré hodiny
3 body

Staré kyvadlové hodiny se musí každou neděli ve stejný čas natáhnout, aby po celý týden ukazovaly správný čas. Při tomto procesu se vždy musí zvednout jejich závaží o hmotnosti $m = 5{,}6\,\mathrm{kg}$ *o* $h = 31\,\mathrm{cm}$ *vzhůru, aby mohlo přes hodinový strojek znovu pohánět kyvadlo hodin. To má délku* $l = 64\,\mathrm{cm}$*, přičemž téměř všechna jeho hmota je umístěna na konci jeho délky. Kolik energie se průměrně disipuje při jednom kyvu?* *Jarda občas chodí pozdě.*

Kyvadlo za čas $t = 1\,\mathrm{týden} = 604\,800\,\mathrm{s}$ „spotřebuje“ potenciální energii závaží, která je

$$E_\mathrm{p} = mgh \doteq 17{,}0\,\mathrm{J}\,,$$

čili ztrátový výkon je $P = \frac{E_\mathrm{p}}{t} \doteq 28{,}1\,\mathrm{\mu W}$. Kyvadlo můžeme podle zadání považovat za matematické s periodou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \doteq 1{,}60\,\mathrm{s}\,.$$

Při jednom kyvu se tak průměrně přemění

$$E = P\frac{T}{2} = \frac{\pi m h}{t}\sqrt{lg} \doteq 22{,}6\,\mathrm{\mu J}\,.$$

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha 3 ... muší kotouč

3 body

Máme homogenní kotouč o hmotnosti $M = 10m$ a poloměru R. Na něm sedí moucha Ľubo o hmotnosti m ve vzdálenosti $0{,}75R$ od středu, přičemž kotouč se i s Ľubem otáčí úhlovou rychlostí $\omega_0 = 1{,}20\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. Na okraj kotouče si přisedne Ľubův stejně těžký kamarád Slavo s nulovým momentem hybnosti vzhledem k ose otáčení kotouče. Předpokládejte, že obě mouchy jsou hmotné body a že na soustavu kotouče a much nepůsobí žádné vnější momenty sil. Zjistěte, jakou úhlovou rychlostí se bude kotouč otáčet poté, co si na něj sedne Slavo.

Tomášovi létaly mouchy okolo hlavy.

Označme číselné faktory zo zadania ako $\alpha = 10$ a $\beta = 0{,}75$. Pre moment zotrvačnosti kotúča platí vzťah $I = \frac{1}{2}MR^2$. V našom špecifickom prípade bude počiatočný moment zotrvačnosti zahrňovať aj Ľuba

$$I_0 = \frac{1}{2}MR^2 + I_\mathrm{L} = \frac{1}{2}\alpha mR^2 + \beta^2 mR^2 = \left(\frac{1}{2}\alpha + \beta^2\right) mR^2\,.$$

Koncový moment zotrvačnosti po príchode Slava bude

$$I_1 = I_0 + I_\mathrm{S} = \left(\frac{1}{2}\alpha + \beta^2 + 1\right) mR^2\,.$$

Uhlovú rýchlosť na konci (po príchode Slava) zistíme pomocou zákona zachovania momentu hybnosti

$$\begin{aligned} L_0 &= L_1\,,\\ I_0\omega_0 &= I_1\omega_1\,,\\ \omega_1 &= \omega_0\frac{I_0}{I_1}\,,\\ \omega_1 &= \omega_0\frac{\frac{1}{2}\alpha + \beta^2}{\frac{1}{2}\alpha + \beta^2 + 1}\,,\\ \omega_1 &\doteq 0{,}848\omega_0 \doteq 1{,}02\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}\,. \end{aligned}$$

Po príchode Slava sa bude kotúč otáčať uhlovou rýchlosťou $\omega_1 \doteq 1{,}02\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

Tomáš Tuleja
tomas.tuleja@fykos.cz

Úloha 4 ... střešní

3 body

Martin stojí na střeše. Koeficient statického tření mezi jeho botami a střešními taškami je $0{,}7$. Na jaké procento původní hodnoty se efektivní koeficient tření Martina se střechou sníží, pokud si Martin sedne, čímž přenese $60\,\%$ svojí váhy z bot na kalhoty, které mají se střešními taškami koeficient statického tření $0{,}4$?

Martin se učil pokrývačem.

V prvním případě je efektivní koeficient jednoduše $f_1 = 0{,}7$. Druhý případ vyřešíme úvahou. $1 - w = 40\,\%$ Martinovy hmotnosti se započítá s koeficientem $f_1 = 0{,}7$ a $w = 60\,\%$ s koeficientem $f_2 = 0{,}4$. Efektivní koeficient v druhém případě bude

$$f = 0{,}4 \cdot 0{,}7 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}52\,.$$

Při řešení předpokládáme konstantní sklon střechy v místech, kde Martin stál i seděl. Matematicky bychom mohli výsledný koeficient vyjádřit jako

$$f = \frac{F_\mathrm{t}}{F_\mathrm{G}} \frac{f_1 F_1 + f_2 F_2}{F_1 + F_2} = f_1 (1 - w) + f_2 w \,.$$

Odpovědí je poměr těchto dvou hodnot $\frac{0{,}52}{0{,}7} \doteq 0{,}74$, což odpovídá 74 %.

Martin Vaněk
martin@fykos.cz

Úloha 5 ... pružina v letadle 3 body

Jak se změní frekvence kmitání ideálního pružinového oscilátoru, když jej umístíme do stoupajícího letadla s přetížením $3g$? Odpověď vyjádřete číslem udávajícím poměr původní a nové frekvence. *Vojta kmital v letadle.*

Frekvence kmitání pružinového oscilátoru závisí pouze na tuhosti pružiny a hmotnosti zavěšeného tělesa, tudíž se v letadle nezmění. Odpověď je proto 1,00.

Vojtěch David
vojtech.david@fykos.cz

Úloha 6 ... soustředíme světlo 4 body

Máme akvárium a tenkou spojnou čočku o malém průměru, která má ve vzduchu optickou mohutnost $\varphi = 4{,}20\,\mathrm{D}$. Svítíme na ni z velké vzdálenosti bodovým zdrojem světla umístěným na její optické ose. Čočka je přitom umístěna $d = 4{,}20\,\mathrm{cm}$ od akvária tak, že její osa je kolmá i na stěnu akvária. Akvárium je dostatečně velké, má tenké sklo a plné vody. V jaké vzdálenosti od středu čočky se soustředí paprsky přicházející ze zdroje? *Karel myslel na optiku.*

Můžeme uvažovat, že na čočku svítíme z nekonečna paprsky se proto soustředí do ohniska. Pokud by byla čočka pouze ve vzduchu, odpovědí by bylo, že se paprsky protnou ve vzdálenosti

$$f = \frac{1}{\varphi} \doteq 23{,}8\,\mathrm{cm}\,.$$

My ovšem máme situaci, kdy se paprsky po vzdálenosti d opět zlomí. Po průchodu do opticky hustšího prostředí se paprsky budou protínat dále, protože dojde k lomu ke kolmici. Díky malému průměru čočky se nám pouze jedná o paprsky, které jsou blízko optické osy a logicky můžeme odhadnout,[1] že poměr vzdáleností bude odpovídat poměru indexů lomu. Dostáváme tak

$$\frac{x}{f - d} = \frac{n}{n_0} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{n}{n_0}\left(f - d\right)\,,$$

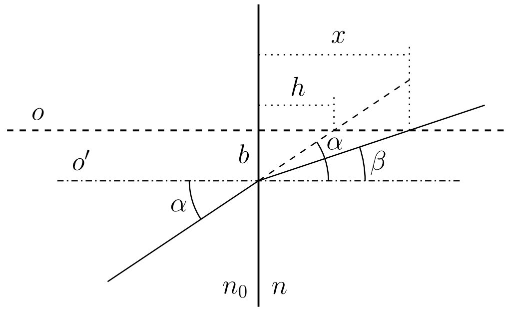
kde x značí vzdálenost protnutí paprsků od stěny akvária. Celková vzdálenost od čočky je tedy

$$s = d + x = d + \frac{n}{n_0}\left(f - d\right) \doteq 30{,}3\,\mathrm{cm}\,.$$

Paprsky se protnou ve vzdálenosti 30,3 cm od optického středu čočky. V rámci přesnosti jsme

[1] Toto je rychlejší a méně korektní varianta řešení, kterou ale také šlo použít. Podrobnější verze následuje.

uvažovali index lomu vzduchu roven indexu lomu vakua, tedy $n_0 \doteq 1$.



Obr. 1: Schematické znázornění lomu světla na rozhraní vzduchu (n_0) a akvária (n) – čárkovaná osa o znázorňuje osu čočky, o' kolmici dopadu paprsku, plnou čarou je chod paprsku, $h = f - d$ je vzdálenost, ve které by se paprsky s toutéž vzdáleností od osy o (označme b) protly bez rozhraní a x je vzdálenost od rozhraní, kde se skutečně protnou

Podívejme se nyní na podrobnější vysvětlení, proč naše řešení funguje. Celou situaci si rozebereme na obrázku 1, ve kterém budou pro lepší představu zakreslené úhly. Osa o je optická osa naší čočky. Zajímáme se o to, co se stane na rozhraní vzduchu a vody. Akvárium je sice skleněné, takže by mělo dojít ke dvěma lomům, ale je tenké a můžeme tedy uvažovat, že jde pouze o jeden lom. Paprsek na stěnu akvária vstupuje pod úhlem α ve vzdálenosti b od osy čočky. Kolmici ke stěně akvária v místě vstupu paprsku máme označenou jako o' a úhel lomu je β. Pokud by nebylo v cestě akvárium a paprsek by pokračoval ve vzduchu, všechny paprsky by se protly ve vzdálenosti $f - d$ od rozhraní. V naší situaci se ale protnou dále ve vzdálenosti, kterou jsme označili jako x.

Tím jsme popsali obrázek a nyní se budeme věnovat řešení. Podívejme se na dva trojúhelníky, které nám v obrázku vznikly. Vyjádříme tangens úhlů α a β

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{f-d}\,, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{x}\,.$$

Druhý vztah upravíme na $b = x \operatorname{tg}\beta$, dosadíme do prvního a vyjádříme x

$$x = (f-d)\,\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\,.$$

Nyní si přichystáme Snellův zákon (zákon lomu) do vhodné podoby pro dosazení

$$n_0 \sin\alpha = n \sin\beta \qquad \Rightarrow \qquad \beta = \arcsin\left(\frac{n_0}{n}\sin\alpha\right)\,.$$

$$x = (f-d)\,\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(\frac{n_0}{n}\sin\alpha\right)\right)}\,.$$

V tuto chvíli se nabízí použít následující vztah, který platí pro všechna z z definičního oboru funkce $\arcsin x$,

$$\operatorname{tg}\arcsin z = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\,.$$

V našem případě je $z = \frac{n_0}{n} \sin\alpha$. Použijeme také $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ a dostáváme

$$x = (f - d)\operatorname{tg}\alpha \left(\frac{\frac{n_0}{n}\sin\alpha}{\sqrt{1 - \frac{n_0^2}{n^2}\sin^2\alpha}} \right)^{-1}$$
$$= (f - d)\,\frac{n}{n_0}\,\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sin\alpha}\sqrt{1 - \frac{n_0^2}{n^2}\sin^2\alpha}$$
$$= \frac{n}{n_0}\,(f - d)\,\frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{1 - \frac{n_0^2}{n^2}\sin^2\alpha}\,.$$

Tím jsme dostali dokonce přesný obecný výsledek pro paprsky dopadající pod libovolným úhlem. Nyní si ale můžeme uvědomit, že se paprsky díky malému průměru čočky budou nacházet blízko optické osy. Tím pádem je úhel α malý a můžeme dosadit $\alpha \approx 0$, tedy $\sin\alpha \approx 0$ a $\cos\alpha \approx 1$. Vyjde nám pak

$$x = \frac{n}{n_0}\,(f - d)\ ,$$

což je přesně to, co jsme chtěli ukázat. Zbytek řešení, tedy opětovné přičtení vzdálenosti čočky od akvária, je pak stejný.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha 7 ... indukované napětí

3 body

Mějme oblast homogenního magnetického pole. Oblast má obdélníkový průřez se stranami $a = 3{,}0\,\mathrm{m}$, $b = 2{,}0\,\mathrm{m}$ *a vektor magnetické indukce* $B = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$ *je na ni kolmý. Rovnoběžně se stranou a vedeme drát tak, že jeho volné konce leží mimo oblast s magnetickým polem. Tyto konce propojíme voltmetrem.*

Nyní začneme drátem pohybovat rovnoměrným přímočarým pohybem rychlostí $v = 0{,}20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ *kolmo na směr magnetické indukce podél strany b. Jaké napětí bude ukazovat voltmetr ve chvíli, kdy drát prochází skrz magnetické pole?*

Jindra vymyslel úlohu, která má delší zadání než řešení.

Napětí vypočítáme jako poměr malé změny magnetického indukčního toku $\mathrm{d}\Phi$ skrz smyčku ku malé změně času $\mathrm{d}t$

$$U = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}SB}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x \cdot aB}{\mathrm{d}t} = Bva = 6{,}0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{V}\,.$$

Téhož lze dosáhnout užitím vzorce pro indukované napětí $U = Bvl$.

Vojtěch David
vojtech.david@fykos.cz

Úloha 8 ... konstantní atmosféra 3 body

Do jaké výšky by dosahovala atmosféra Země, kdyby měla v celém svém profilu konstantní hustotu $\rho = 1{,}29\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$*? Uvažujte, že je Země dokonale kulatá a že atmosféra má hmotnost* $m = 5{,}157 \cdot 10^{18}\,\mathrm{kg}$. *Karel stále spekuluje.*

Objem atmosféry s konstantní hustotou ρ by byl

$$V = \frac{m}{\rho} \doteq 3{,}998 \cdot 10^{18}\,\mathrm{kg}\,.$$

V úloze uvažujme poloměr Země $R_\oplus = 6{,}378 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$ – jde sice o rovníkový poloměr, ale v rámci požadované přesnosti na dvě platné cifry nám to bude stačit. Z poloměru získáme plochu zemského povrchu $S = 4\pi R_\oplus^2 \doteq 5{,}11 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m}^2$.

Vzhledem k tomu, že je atmosféra relativně tenká, nemusíme uvažovat, že by povrch Země s atmosférou byl o něco větší než povrch Země samotné. Výšku atmosféry h pak dostaneme velice jednoduše podílem objemu atmosféry a povrchu Země jako

$$h = \frac{V}{S} = \frac{m}{4\pi\rho R_\oplus^2}\,,$$
$$h \doteq 7{,}8 \cdot 10^3\,\mathrm{m}\,.$$

Smyšlená atmosféra Země by měla výšku pouhých 7 800 m.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha 9 ... drmolení 4 body

Entomolog chytil mola a chce si ho vysušit. Určete jeho hmotnost po odpaření vody, víte-li, že koule tvořená molem živých molů

- *obsahuje* $n = 3{,}346 \cdot 10^{19}\,\mathrm{mol}$ *molekul vody,*
- *má povrch odpovídající dvacetičtyřnásobku rozlohy Moldavska (včetně Podněstří),*
- *má hustotu* $\rho = 27{,}4\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Vojta poslouchal Dvořákovo Rondo g moll.

Nechť N značí počet molů v kouli, tedy numerickou hodnotu Avogadrovy konstanty vyjádřené v mol^{-1}. Nejdříve vypočítáme hmotnost živého mola

$$m_\mathrm{m} = \frac{\rho V}{N_\mathrm{A}} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{N_\mathrm{A}}\,,$$

přičemž

$$r = \sqrt{\frac{24 S_\mathrm{M}}{4\pi}} = \sqrt{\frac{6 S_\mathrm{M}}{\pi}}\,,$$

kde $S_\mathrm{M} = 33\,843\,\mathrm{km}^2$ je rozloha Moldavska. Celkově máme

$$m_\mathrm{m} = \frac{4\pi\rho}{3N_\mathrm{A}} \left(\frac{6S_\mathrm{M}}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{8\rho}{N_\mathrm{A}} \sqrt{\frac{6S_\mathrm{M}^3}{\pi}} \doteq 3{,}13\,\mathrm{mg}\,.$$

Hmotnost vody v něm obsažené bude

$$m_\mathrm{v} = \frac{nM_{\mathrm{H_2O}}}{N_\mathrm{A}} \doteq 1{,}00\,\mathrm{mg}\,.$$

Proto

$$m = m_\mathrm{m} - m_\mathrm{v} = 2{,}13\,\mathrm{mg}\,.$$

Vojtěch David
`vojtech.david@fykos.cz`

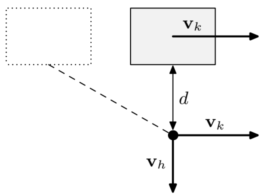
Úloha 10 ... nevyklánějte se z oken

4 body

Hodnostář se veze v kočáru. Zatímco se pohybuje rychlostí $v_\mathrm{k} = 2{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, jí jablko. Jakmile jej dojí, vyhodí ohryzek ven z okénka tak, že mu dodá rychlost o velikosti $v_\mathrm{h} = 3{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ ve vodorovném směru kolmém na směr jízdy kočáru. Ohryzek trefí do hlavy nic netušícího rolníka, který se v momentě zásahu nachází ve vzdálenosti $d = 1{,}0\,\mathrm{m}$ od hodnostáře a nepohybuje se. Jakou rychlostí narazil ohryzek do rolníkovy hlavy? Ohryzek považujte za hmotný bod.

Lego často cestuje vlakem.

Ohryzek bude mít tři složky rychlosti, na které je možno z principu nezávislosti pohybů nahlížet zvlášť. První složku, jíž bude tvořit rychlost ve směru kočáru (označme tento směr x) o velikosti v_k, druhou složku v_h, představující vodorovnou rychlost, kolmou ke směru x (tento směr označme y), kterou byl vyhozen ven, a třetí, svislou složku, kterou ohryzek získal v důsledku gravitačního zrychlení (směr značme z).



Obr. 2: Grafické znázornění pohybu kočáru a ohryzku.

Víme, že v momentě nárazu byla vzdálenost rolníka od kočáru rovna d. Uvědomme si, že ohryzek i kočár ve směru x urazily od okamžiku vyhození z okna tutéž vzdálenost. To znamená, že v době, kdy ohryzek narazil do rolníkovy hlavy, se kočár nacházel rolníkovi nejblíže (viz obrázek 2). Proto ohryzek ve směru y musel urazit přesně vzdálenost d.

Díky tomu jsme schopni dopočítat čas jeho letu $t = \frac{d}{v_\mathrm{h}}$, odkud už umíme následně určit rychlost ve směru z

$$v_z = \frac{gd}{v_\mathrm{h}}\,.$$

Se znalostí všech tří složek již můžeme pomocí Pythagorovy věty dopočítat výslednou rychlost

$$v = \sqrt{\left(\frac{gd}{v_\mathrm{h}}\right)^2 + v_\mathrm{k}^2 + v_\mathrm{h}^2} \doteq 4{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Vojtěch David
`vojtech.david@fykos.cz`

Úloha 11 ... ve zdravém těle zdravý duch — 4 body

Mějme pružné lano upevněné jedním koncem ke stěně. Za druhý konec táhne Danka, která stojí na malém koberečku volně položeném na podlaze. Do jaké maximální vzdálenosti od stěny může být lano Dankou nataženo, aby pružná síla lana nepřitáhla Danku i s koberečkem blíže ke stěně? Koeficient statického smykového tření mezi podlahou a koberečkem je $f = 0{,}45$, zatímco mezi Dančinými chodidly a koberečkem je mnohem větší. Danka váží $m = 55\,\mathrm{kg}$ a hmotnost koberečku je zanedbatelná. Předpokládejte, že lano je natahováno vodorovně, jeho klidová délka je $l_0 = 1{,}97\,\mathrm{m}$ a tuhost $k = 164\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. *Danka cvičila.*

Pružná sila lana ja daná jeho natiahnutím oproti pokojovej dĺžke ako $F_\mathrm{p} = k\,(l - l_0)$, kde l je dĺžka natiahnutého lana. Statická šmyková trecia sila rastie so zvyšovaním sily pružnosti tak, aby ju akurát kompenzovala, a to až do momentu, keď sa dosiahne maximálnej statickej šmykovej trecej sily. Pre túto hraničnú silu platí

$$F_\mathrm{t} = fF_\mathrm{n} = fmg\,.$$

kde F_t je trecia sila v opačnom smere pôsobenia lana a F_n je sila, ktorou Danka a koberec pôsobia na zem. V hraničnom prípade sa sila pružnosti vyrovná s maximálnou šmykovou trecou silou

$$k\,(l - l_0) = fmg\,.$$

Z rovnice si vyjadríme dĺžku lana a dosadíme príslušné hodnoty

$$l = l_0 + \frac{fmg}{k}\,,$$
$$l \doteq 3{,}45\,\mathrm{m}\,.$$

Lano môže byť natiahnuté maximálne do vzdialenosti 3,45 m od steny.

Daniela Pittnerová
`daniela@fykos.cz`

Úloha 12 ... zákeřně zakouřená — 4 body

Jeden typický ionizační kouřový detektor obsahuje vzorek $^{241}\mathrm{Am}$ *odpovídající radioktivitě* $1\,\mathrm{\mu Ci}$. *Kolik takových detektorů bychom museli minimálně rozebrat, abychom dokázali spustit řetězovou reakci? Kritické množství* $^{241}\mathrm{Am}$ *odpovídá přibližně* 60 kg.

Pepa neustále krade úlohy z učebnic.

Z tabulek zjistíme poločas rozpadu $^{241}\mathrm{Am}$ $T = 432{,}6$ let. Měrná aktivita vzorku se spočte jako

$$a = \frac{1}{m}\left|\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\lambda N}{m} = \frac{\lambda N}{NA_\mathrm{R}u}\,,$$

kde $A_\mathrm{R} = 241$ je relativní atomová hmotnost ^{241}Am, $u = 1{,}661 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ značí atomovou hmotnostní konstantu a λ je rozpadová konstanta ^{241}Am, tedy $\frac{\ln 2}{T}$.

Aktivitu vzorku převedeme do její základní SI jednotky, což je jednotka Becquerel ($\mathrm{Bq} = \mathrm{s}^{-1}$). Její vzthah k jednotce Curie (Ci) je $1\,\mathrm{Ci} = 3{,}7 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Bq}$. Měrnou aktivitu americia jsme totiž určili v jednotkách $\mathrm{Bq{\cdot}kg^{-1}}$. Pro hmotnost jednoho vzorku z detektoru potom platí

$$m = \frac{3{,}7 \cdot 10^4\,\mathrm{Bq}}{a} \doteq 0{,}29\,\mathrm{\mu g}\,.$$

Kritické množství 60 kg odpovídá přibližně $60\,\mathrm{kg}/0{,}29\,\mathrm{\mu g} = 207$ miliardám detektorů.

Josef Trojan
josef.trojan@fykos.cz

Úloha 13 ... zdroj elektronů (4 body)

Uvažujme bodový zdroj, který vyzařuje elektrony s rychlostí $v = 20\,000\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$ do roviny yz a je umístěn v homogenním magnetickém poli o velikosti B směřujícím ve směru osy x. Zdroj elektronů je obklopen trubkou, jejíž osa symetrie prochází zdrojem a je rovnoběžná s osou y. Její poloměr je roven $R = 10\,\mathrm{cm}$. Spočtěte minimální velikost magnetického pole B potřebného k tomu, aby se vyzařované elektrony nedotkly zmiňované trubice. *Kiko si četl zelená skripta.*

Na elektrón pôsobí magnetická zložka Lorentzovej sily

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}\,,$$

kde $e \doteq 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ je elementárny náboj. Magnetická indukcia $\mathbf{B}$ je orientovaná v smere osi x, čo je kolmo na ľubovoľný vektor rýchlosti $\mathbf{v}$ roviny yz. Pre veľkosť Lorentzovej sily preto máme

$$F = evB.$$

Lorentzova sila je neustále v rovine yz a kolmo na $\mathbf{v}$. To znamená, že elektrón sa bude pohybovať po kružnici s polomerom r. Pre dostredivé zrýchlenie platí

$$\frac{v^2}{r} = a = \frac{F}{m_e} = \frac{eBv}{m_e}\,.$$

Na to, aby sa elektróny nedotkli trubice, musí byť polomer dráhy elektrónu r najviac polovica z polomeru trubice R. Z toho vyjadríme minimálnu veľkosť magnetickej indukcie

$$B = \frac{2m_e v}{eR} \doteq 2{,}3\,\mathrm{mT}\,.$$

Radovan Lascsák
radovan.lascsak@fykos.cz

Úloha 14 ... je venku zima? 4 body

Navrhujeme zahradní teploměr. Chceme, aby jeho stupnice dosahovala hodnot od $-40\,°\mathrm{C}$ do $+50\,°\mathrm{C}$, přičemž by její nejmenší dílek měl odpovídat $1\,°\mathrm{C}$. Abychom jednotlivé hodnoty dokázali okem dobře rozlišit i ze vzdálenosti $2\,\mathrm{m}$ od teploměru, potřebujeme, aby jednotlivé rysky mezi sebou měly úhlovou vzdálenost alespoň $4'$. Poloměr kapiláry teploměru je $0{,}2\,\mathrm{mm}$. Jaké musí být minimální množství lihu v teploměru, aby mohl ukazovat v celém uvedeném rozsahu teplot? Použitý líh má objemovou teplotní roztažnost $\beta = 1{,}1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$.

Jarda vám jednou prodá teploměr.

Vzdálenost rysek musí být nejméně

$$d = l \operatorname{tg} \theta \approx l\theta \doteq 2{,}3\,\mathrm{mm}\,,$$

kde $l = 2\,\mathrm{m}$ je vzdálenost, ze které se díváme a $\theta = 4'$ je úhel, pod kterým musíme vidět mezeru mezi ryskami. Označne $\delta = 1\,°\mathrm{C}$ velikost nejmenšího dílku. Abychom mohli uvedenou stupnici zakreslit, musí mít teploměr výšku alespoň

$$h = d\frac{\Delta T}{\delta} \doteq 21\,\mathrm{cm}\,.$$

Líh tak musí být schopen vyplnit objem

$$\Delta V = \pi r^2 h \doteq 26\,\mathrm{mm}^3\,,$$

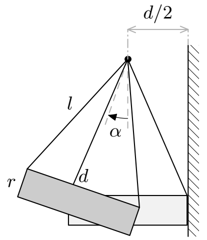
a to při změně teploty o $\Delta T = 90\,°\mathrm{C}$. Změna objemu v závislosti na změně teploty je $\Delta V = V\beta\Delta T$, kde V je původní objem a $\beta = 1{,}1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$ je zadaná teplotní roztažnost lihu. Odtud

$$V = \frac{\Delta V}{\beta \Delta T} = \frac{\pi r^2 l\theta}{\beta}\,,$$

$$V \doteq 266\,\mathrm{mm}^3\,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 15 ... beranidlo 5 bodů



Rozhodli jsme se dobýt Pražský hrad. Hlavní bránu zničíme beranidlem ve tvaru tlustého homogenního válce o délce $d = 2{,}0\,\mathrm{m}$, poloměru $r = 25\,\mathrm{cm}$ a osou umístěnou vodorovně. Na horní hranu obou konců válce připneme $l = 2{,}0\,\mathrm{m}$ dlouhá lanka, která upevníme do společného bodu přesně nad středem válce. S takto sestaveným beranidlem přijedeme k bráně tak, že jeden jeho konec se dotýká brány. Beranidlo vychýlíme o $\alpha = 20°$ okolo bodu závěsu a pustíme. Jakou rychlostí narazí do brány?

Jarda chce být prezidentem FYKOSu.

Vyjdeme ze zákona zachování energie. Při vychýlení o něco zvýšíme polohu těžiště válce, dodáme tedy potenciální energii

$$E_\mathrm{p} = mgh = mgs\left(1 - \cos\alpha\right)\,,$$

kde $\alpha = 20^\circ$ a $s = r + \sqrt{l^2 - \frac{d^2}{4}}$ je vzdálenost těžiště od osy otáčení. Tato energie se přemění na rotační $E_\mathrm{r} = \frac{1}{2}J\omega^2$, kde ω je úhlová rychlost otáčení a J je moment setrvačnosti válce vůči zvolené ose. Ten nyní musíme vypočítat. Válec stále ještě můžeme při daných rozměrech aproximovat jako tenkou tyč, jeho moment setrvačnosti vůči ose procházející težištěm kolmo na osu symetrie je

$$J_s = \frac{1}{12}md^2\,.$$

Chyba této aproximace je asi pět procent, protože ale ještě musíme použít Steinerovu větu, nebude tato chyba hrát dále roli. Výsledný moment setrvačnosti je totiž ze Steinerovy věty

$$J = J_s + ms^2 = \frac{1}{12}md^2 + m\left(r + \sqrt{l^2 - \frac{d^2}{4}}\right)^2\,.$$

Rychlost dopadu pak vyjádříme jako

$$v = \omega s = \sqrt{\frac{2mgs\left(1 - \cos\alpha\right)}{J}}s = \sqrt{\frac{2gs\left(1 - \cos\alpha\right)}{\frac{1}{12}d^2 + \left(r + \sqrt{l^2 - \frac{d^2}{4}}\right)^2}}s = 1{,}47\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 16 ... noční lekce termodynamiky 4 body

Verča se ztratila na výletě a rozhodla se přespat ve staré chatrči. V noci venku teplota klesla na $t_0 = 10{,}0\,^\circ\mathrm{C}$ a Verča uvnitř udržovala teplotu $t_1 = 16{,}0\,^\circ\mathrm{C}$. Chatrč měla ale ve zdi díru o rozměrech $a \times b$, kde $a = 0{,}50\,\mathrm{m}$ a $b = 0{,}30\,\mathrm{m}$. Aby jí neunikalo tolik tepla, zacpala díru dvěma cihlami o průřezech $S_1 = a \times (b/3)$ a $S_2 = a \times (2b/3)$ se součiniteli tepelné vodivosti $\lambda_1 = 0{,}80\,\mathrm{W{\cdot}m^{-1}{\cdot}K^{-1}}$ a $\lambda_2 = 1{,}30\,\mathrm{W{\cdot}m^{-1}{\cdot}K^{-1}}$, jejichž délka odpovídala tloušťce stěny $s_1 = 15\,\mathrm{cm}$, takže dohromady přesně vyplnily díru. Bylo by ale hezčí vidět ven. Jaký by musela mít součinitel tepelné vodivosti λ homogenní skleněná deska o tloušťce $s_2 = 3{,}0\,\mathrm{mm}$ zasazená do díry rovnoběžně se stěnou (jako okno), aby odváděla teplo z chatrče stejně jako dané dvě cihly? Uvažujte, že zbytek chatrče izoluje dokonale.

Verča se občas ztrácí i jinde než na přednáškách.

Veličina, kterou chceme zachovat, je tepelný tok, který obecně spočítáme jako

$$q = \frac{t_1 - t_0}{R}\,,$$

kde $t_1 - t_0$ je rozdíl teplot na krajích, R je tepelný odpor tělesa

$$R = \frac{d}{\lambda S}\,,$$

přičemž d je tloušťka tělesa, skrz které teplo vedeme, S je průřez tělesa a λ je jeho součinitel tepelné vodivosti. Protože rozdíl teplot je v obou případech stejný, stačí nám porovnat tepelné odpory cihel a skleněného kvádru. Odpory se skládají stejně jako v elektrických obvodech, tudíž pro celkový tepelný odpor paralelně uložených cihel platí

$$\frac{1}{R_{c1}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{ab(\lambda_1 + 2\lambda_2)}{3s_1} \quad \Rightarrow \quad R_{c1} = \frac{3s_1}{ab(\lambda_1 + 2\lambda_2)}$$

a tepelný odpor skleněného kvádru je

$$R_{c2} = \frac{s_2}{ab\lambda}\,.$$

Po dosazení do rovnosti

$$R_{c1} = R_{c2}$$

dostaneme

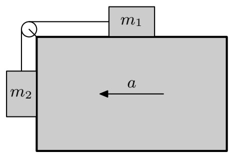
$$\frac{3s_1}{2\lambda_2 + \lambda_1} = \frac{s_2}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{s_2(2\lambda_2 + \lambda_1)}{3s_1}\,.$$

Vidíme, že nic kromě hodnot jednotlivých součinitelů a tlouštěk nemělo na výsledek vliv, protože všechny ostatní veličiny byly pro oba případy stejné. Číselně dostaneme $\lambda = 0{,}022\,7\,\mathrm{W{\cdot}m^{-1}{\cdot}K^{-1}}$.

Veronika Hendrychová
`vercah@fykos.cz`

Úloha 17 ... pohybující se kladky na vagónu — 5 bodů

Mějme vagon ve tvaru kvádru, jenž se pohybuje se zrychlením $a = 1{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Na něm je položený menší kvádr s hmotností $m_1 = 15\,\mathrm{kg}$, který je lanem přes kladku spojený s dalším kvádrem o hmotnosti $m_2 = 10\,\mathrm{kg}$, visícím před přední stěnou vagonu. S jakým zrychlením budou kvádříky akcelerovat vzhledem k vagonu, pokud je koeficient tření mezi kvádříky a vagonem $f = 0{,}15$ a lano i kladka jsou nehmotné?



Legolas velmi rád upravuje vlastní úlohy.

Nakoľko lano aj kladka sú nehmotné, tak sila, ktorou lano ťahá kváder m_2 nahor je rovnako veľká, ako sila, ktorá ťahá kváder m_1 doľava. Označme si veľkosť tejto sily T.

Na kváder m_1 ešte okrem sily T pôsobí trenie (takisto aj normálová sila od vagóna a tiažová sila, tie sa však vyrušia). Veľkosť trecej sily bude klasicky $F_t^1 = fm_1g$. Táto sila pôsobí proti zrýchleniu, takže výsledná pohybová rovnica pre tento kváder bude

$$T - fm_1g = m_1a_1\,,$$

kde predpokladáme, že kváder bude viac zrýchľovať ako vagón a teda bude po ňom kĺzať smerom doľava. Ak by bol tento náš predpoklad nesprávny, vyšiel by nám na konci záporný výsledok. Ale pozor! Ten by nestačilo len tak odovzdať, nakoľko by to znamenalo, že sme celý čas predpokladali nesprávny smer zrýchľovania a v celom nasledujúcom výpočte by sme počítali s opačným znamienkom trenia! Prečo predpokladáme práve tento smer? Z jednoduchého odhadu, že $m_1a < m_2g$.

V sústave zrýchľujúcej spolu s vagónom tlačí kvádrik m_2 na stenu vagóna silou m_2a, čo je zároveň aj sila, ktorou naň stena skutočne tlačí (čiže v sústave spojenej s vagónom tento kvádrik nebude vo vodorovnom smere zrýchľovať, čo by sme celkom čakali). Vo zvislom smere naň teda pôsobí trecia sila veľkosti $F_t^2 = fm_2a$, tiažová sila $F_g^2 = m_2g$ a ťahová sila lana T.

Konzistentne s prvým kvádrikom predpokladajme, že aj tento bude zrýchľovať smerom dole a potom dostávame rovnicu

$$m_2 g - T - f m_2 a = m_2 a_2 \,.$$

Neznáme v týchto dvoch rovniciach sú zrýchlenia a sila T, nakoľko sú ale oba kvádriky priviazané na jednom napnutom lane, ich zrýchlenia budú rovnako veľké v sústave spojenej s vagónom. Lenže a_1 sme si napísali ako výsledné zrýchlenie, čiže z neho potrebujeme vyjadriť zrýchlenie kvádrika m_1 v sústave spojenej s vagónom a_1'. To môžeme spraviť buď pripočítaním zotrvačnej sily, alebo uvedomením si, že $a_1 = a + a_1'$. V každom prípade dostaneme

$$T - f m_1 g - m_1 a = m_1 a_1' \,.$$

Následne použijeme fakt, že v tejto sústave platí pre veľkosti zrýchlení $a_2 = a_1'$, potom rovnice sčítame, čím sa zbavíme aj neznámej T a vyjadríme výsledné zrýchlenie

$$m_2 g - m_1 a - f m_2 a - f m_1 g = (m_1 + m_2)\, a_2$$

$$a_2 = \frac{m_2 g - m_1 a - f m_2 a - f m_1 g}{m_1 + m_2} \doteq 2{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \,.$$

Samozrejme, že sme rovno mohli začať pracovať v sústave zrýchľujúcej spolu s vagónom. V nej by sme interpretovali $m_{1,2} a$ ako zotrvačnú silu pôsobiacu na telesá v tejto sústave a po veľmi podobnom (a asi trochu kratšom) výpočte by sme dospeli k rovnakému výsledku.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha 18 ... pozor na kašnu

4 body

Na náměstí je kruhová kašna o průměru $D = 6\,\mathrm{m}$. Uprostřed ní tryská kolmo vzhůru pramen vody do výšky $h = 4\,\mathrm{m}$. Jakou nejnižší rychlostí musí zavanout krátký poryv větru, aby tryskající voda dopadla mimo kašnu? Předpokládejte, že vítr fouká vodorovně a předá kapkám vody $20\,\%$ své rychlosti. *Danka sledovala děti koupající se v kašně.*

Čím dlhšie budú kvapky vody vo vzduchu, tým ďalej môžu doletieť. Preto je najvýhodnejšie, aby krátky poryv vetra prišiel tesne po vystreknutí vody. Takto získajú kvapky horizontálnu zložku rýchlosti $v = 0{,}2 v_\mathrm{v}$, kde v_v je hľadaná rýchlosť vetra. Čas T, ktorý strávi kvapka nad zemou je dvojnásobok času jej pádu t z najvyššej výšky h. Preto

$$T = 2t = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} \,,$$

kde g je gravitačné zrýchlenie. Hraničný prípad, kedy kvapka dopadne priamo na okraj fontány nastane, ak v horizontálnom smere prejde polomer fontány, čo nastane ak $vT = D/2$. Tým pádom vietor musí fúkať rýchlejšie ako

$$v_\mathrm{v} = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{g}{2h}} D \doteq 8{,}3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \,.$$

Radovan Lascsák
`radovan.lascsak@fykos.cz`

Úloha 19 ... Beryllgläser

5 bodů

Máme dvě tenké čočky, které mají stejný tvar. Jedna je z plastu o indexu lomu $n_\mathrm{p} = 1{,}67$ a má optickou mohutnost $\varphi_\mathrm{p} = 4{,}20\,\mathrm{D}$. Druhá je z berylu a má index lomu $n_\mathrm{b} = 1{,}57$. Jakou má druhá čočka optickou mohutnost? Čočky se nachází ve vzduchu.

Karel slyšel, že dříve byla brýlová skla z berylu, z čehož vznikl německý název brýlí.

Pre tenkú šošovku môžeme optickú mohutnosť spočítať ako

$$\varphi = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) ,$$

kde n_2 je index lomu okolitého prostredia. To je v našom prípade vzduch s indexom lomu $n_\mathrm{v} = 1$, n_1 je index lomu šošovky (čiže buď plastu, alebo berylu) a r_1 a r_2 sú polomery zakrivenia šošovky. Tie nás ale veľmi zaujímať nebudú, pretože vieme, že obe šošovky majú rovnaký tvar a teda hodnota $(1/r_1 + 1/r_2)$ bude pre obe šošovky rovnaká. Tento výraz môžeme určiť z hodnoty optickej mohutnosti plastovej šošovky

$$\varphi_\mathrm{p} = (n_\mathrm{p} - 1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$
$$\frac{\varphi_\mathrm{p}}{n_\mathrm{p} - 1} = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) .$$

A to už len dosadíme do rovnakého výrazu pre berylovú šošovku

$$\varphi_\mathrm{b} = (n_\mathrm{b} - 1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = (n_\mathrm{b} - 1)\frac{\varphi_\mathrm{p}}{n_\mathrm{p} - 1} = 3{,}57\,\mathrm{D} .$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha 20 ... napouštění vany

3 body

Robert o hmotnosti $m = 60\,\mathrm{kg}$ a o stejné hustotě, jako má voda, si chtěl napustit vanu a u toho si změřit průtok vody z kohoutku. Vana má obdélníkovou podstavu $150\,\mathrm{cm} \times 75\,\mathrm{cm}$ a Robert napustil vodu do výšky $h = 20\,\mathrm{cm}$, přičemž byl ponořen $p = 80\,\%$ svého těla. Napouštění trvalo $t = 8\,\mathrm{min}$. Určete průtok vody.

Robert tráví až moc času ve vaně.

Objem vany do výšky hladiny vody je $V_\mathrm{v} = abh = 0{,}225\,\mathrm{m^3}$. Robert ale nějakou vodu vytlačuje. Vytlačuje jí přesně tolik, kolik je jeho ponořený objem. Ten je $V_\mathrm{p} = pm/\rho = 0{,}048\,\mathrm{m^3}$. Objem napuštěné vody je tak jen $V = V_\mathrm{v} - V_\mathrm{p} = 0{,}177\,\mathrm{m^3}$. Průtok vody tak je

$$Q = \frac{V}{t} \doteq 22\,\mathrm{l{\cdot}min^{-1}} .$$

Robert Gemrot
`robert.gemrot@fykos.cz`

Úloha 21 ... Lipno a relativita
5 bodů

Jarda zjistil, že běhání je náročné. Chtěl se urychlit na 99 % rychlosti světla, ale potřeboval by na to hodně energie. Aby si takové množství energie dokázal bez problémů představit, spočítal, kolikrát by musel ohřát a vypařit celou nádrž Lipno o objemu 310 milionů krychlových metrů, pokud by v něm vždy byla na počátku voda o teplotě 20 °C. Jarda má hmotnost 75 kg. Kolik mu vyšlo, předpokládáme-li, že to spočítal správně? *Jardovi došla energie.*

Při rychlosti v tak blízké rychlosti světla c je celková energie pohybujícího se předmětu dána relativistickým vztahem

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ,$$

kde m_0 je klidová hmotnost. Nyní, když je Jarda v klidu a píše vzorák, je jeho energie $E_0 = m_0 c^2$, takže k urychlení potřebuje „jen“

$$\Delta E = E - E_0 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = 6{,}09 m_0 c^2 .$$

Nyní spočítáme, kolik tepla je potřeba na jedno ohřátí a vypaření Lipna. Je to součet

$$M c_\mathrm{v} \Delta T + M l = \rho V \left(c_\mathrm{v} \left(T_\mathrm{v} - T_0 \right) + l \right) ,$$

kde $M = \rho V$ je hmotnost vody v Lipně, $V = 310 \cdot 10^6\,\mathrm{m^3}$ je objem Lipna, $\rho = 998\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ je hustota vody, c_v je měrná tepelná kapacita vody, l je měrné skupenské teplo vypařování a $T_\mathrm{v} - T_0 = 100\,°\mathrm{C} - 20\,°\mathrm{C} = 80\,°\mathrm{C}$ je potřebný rozdíl teplot. Nakonec už jenom vyjádříme počet těchto vypařovacích cyklů jako

$$n = \frac{6{,}09 m_0 c^2}{\rho V \left(c_\mathrm{v} \left(T_\mathrm{v} - T_0 \right) + l \right)} = 51{,}1 \doteq 52 .$$

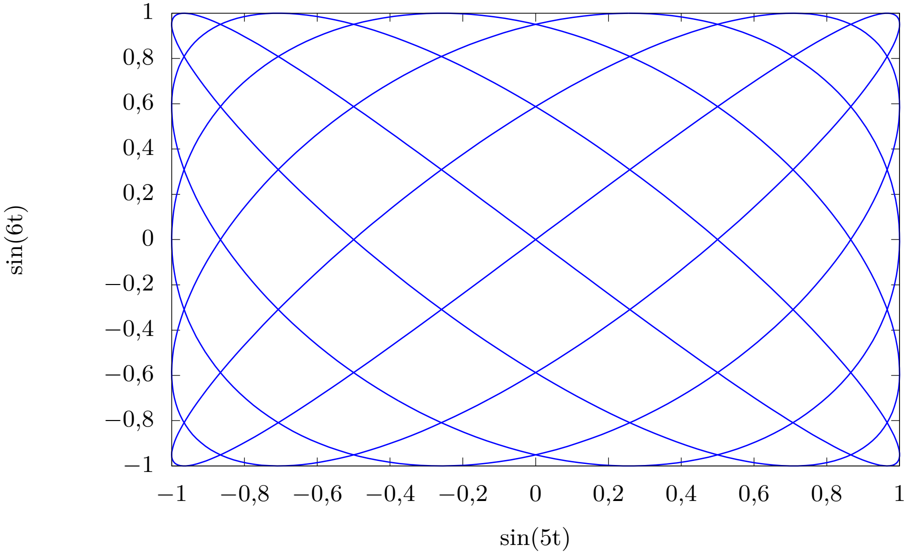
Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 22 ... Lissajousovo protínání
5 bodů

Máme bod, který kmitá v ose x podle rovnice $x = x_\mathrm{m} \sin 5\omega t$ a v ose y pak podle $y = y_\mathrm{m} \sin 6\omega t$, kde x_m a y_m jsou maximální výchylky, které mohou být různé, t je čas a kde 5ω a 6ω jsou úhlové rychlosti kmitání. Na kolika různých místech v rovině xy se graf pohybu protne?
Karel rád zadává něco s Lissajousovými obrazci.

Nejrychlejší řešení je vykreslit si graf v libovolném programu, který podporuje parametrické rovnice. Jednou z nejpřímějších možností je využít Wolfram Alpha,[2] který je dostupný zdarma. Vykreslujeme graf pro $x_\mathrm{m} = y_\mathrm{m} = 1$, protože tyto dvě hodnoty pouze škálují velikost grafu, ale nemění počet protnutí. Podobně pokládáme $\omega = 1$, protože to nám pouze říká, jak rychle bod grafem prochází. Vzhledem k poznámce, že se pohyb opakuje do nekonečna, vykreslí i velice pomalé kmitání celý graf. Máme-li nyní graf podobný tomu, který vidíme na obrázku 3, stačí

[2] `https://tinyurl.com/lissajous-intersections`



Obr. 3: Vzniklý Lissajousův obrazec.

spočítat body, kde se Lissajousova křivka protíná sama se sebou. Jdeme-li po „sloupcích protnutí", sčítáme $4+5+4+5+4+5+4+5+4+5+4=49$. Kdybychom to vzali po řádcích, došli bychom k témuž výsledku $5+6+5+6+5+6+5+6+5=49$. Graf pohybu se tedy protíná celkem na 49 různých místech.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha 23 ... pobíhající dirigent

5 bodů

Před začátkem každé zkoušky symfonického orchestru se všechny nástroje naladí. To probíhá tak, že klavír či hoboj vydají komorní A (pro účely této úlohy předpokládejte, že se jedná o tón o frekvenci $f_\mathrm{A} = 443\,\mathrm{Hz}$) a ostatní hudebníci své nástroje doladí podle nich. Představme si, že nestíhající dirigent během tohoto procesu ještě na poslední chvíli pobíhá mezi jednotlivými instrumentalisty rychlostí $v_\mathrm{d} = 3{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Předpokládejme, že když běží mezi hobojistou a klavíristou, tóny jejich nástrojů interferují. Jakou frekvenci rázů uslyší?

Vojta neúspěšně ladil cello.

Frekvenci rázů f_r určíme jako rozdíl frekvencí, které k dirigentovi dorazí. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že běží od hobojisty ke klavíristovi. Pak:

$$f_\mathrm{r} = f_\mathrm{k} - f_\mathrm{h} = f_\mathrm{A}\left(\frac{c+v_\mathrm{d}}{c}\right) - f_\mathrm{A}\left(\frac{c-v_\mathrm{d}}{c}\right) = 2f_\mathrm{A}\frac{v_\mathrm{d}}{c} \doteq 7{,}74\,\mathrm{Hz}\,.$$

Alternativně lze na úlohu nahlížet tak, že dirigent běží stojatou vlnou vzniklou interferencí tónů klavíru a hoboje. Ráz poté uslyší pokaždé, když proběhne přes některou z kmiten, které jsou od sebe vzdálené polovinu vlnové délky, tedy $\frac{c}{2f_A}$. Frekvenci rázů poté určíme jako převrácenou hodnotu času T, který mu bude trvat tuto vzdálenost překonat, tedy:

$$f_r = \frac{1}{T} = 2f_A \frac{v_d}{c} \,,$$

což dává tentýž výsledek.

Vojtěch David
`vojtech.david@fykos.cz`

Úloha 24 ... na výšce nezáleží 4 body

Uvažujme klasické matematické kyvadlo – hmotnou kuličku na nehmotném lanku. Toto kyvadlo umístíme do balónu a necháme stoupat atmosférou. Teplota okolního vzduchu klesá lineárně s nadmořskou výškou h jako $t = t_0 - kh$, kde $t_0 = 25\,^\circ\mathrm{C}$ a $k = 0{,}007\,\mathrm{K\cdot m^{-1}}$. Zároveň ale víme, že intenzita gravitačního pole Země s rostoucí výškou nad povrchem pomalu klesá. Jaký by musel být (nenulový) součinitel teplotní roztažnosti lanka α, aby perioda kmitů kyvadla zůstala na výšce nezávislá? *Jardovi je v 16. patře na kolejích zima.*

Perioda matematického kyvadla je

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \,,$$

kde g je tíhové zrychlení a l je délka lanka. Tíhové zrychlení je ovšem ve vyšší nadmořské výšce h menší, protože gravitační síla se vzdáleností od Země klesá. Pokud zanedbáme odstředivou sílu, platí

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{g_0 R_\oplus^2}{(R_\oplus + h)^2} \approx g_0 \left(1 - \frac{2h}{R_\oplus}\right) \,,$$

kde $R_\oplus$ je poloměr Země a g_0 je tíhové zrychlení na povrchu Země.

Jestliže má perioda zůstat konstantní, ale tíhové zrychlení se zmenšuje, musí se zmenšit i délka závěsu. To se ovšem děje kvůli teplotní roztažnosti. Délka kyvadla se mění lineárně s teplotou podle vztahu

$$l = l_0\left(1 - \alpha(t_0 - t)\right) = l_0\left(1 - \alpha(t_0 - t_0 + kh)\right) = l_0\left(1 - \alpha kh\right) \,,$$

kde α je hledaný součinitel teplotní roztažnosti. Protože perioda má zůstat stejná, musí platit

$$\frac{l_0}{g_0} = \frac{l}{g} = \frac{l_0(1 - \alpha kh)}{g_0\left(1 - \frac{2h}{R_\oplus}\right)} \,,$$

odkud

$$\alpha = \frac{2}{R_\oplus k} \doteq 4{,}5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K^{-1}} \,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 25 ... dutá Země má mnoho variant 5 bodů

Na jakou hodnotu by se zmenšilo gravitační zrychlení na povrchu Země, pokud by naše planeta nebyla plná, ale byla to pouze kulová slupka se stejným vnějším poloměrem, jako má Země nyní, avšak s tloušťkou pouze $D = 100{,}0\,\mathrm{km}$? Uvažujte, že by kulová slupka byla homogenní a měla stejnou hustotu, jako má průměrně Země. Výsledek udejte jako násobek gravitačního zrychlení, které nyní působí na povrchu Země. *Karel se pořád vrací k motivu koulí.*

Hmota planety je dle zadání sféricky symetricky rozložená. Na jejím povrchu tak můžeme uvažovat, že je slupka ekvivalentní situaci, kdy by byla hmota soustředěná do jejího těžiště, od kterého jsme vzdálení $R_\oplus$ (poloměr Země). Můžeme tak použít Newtonův vzorec pro sílu působící na těleso hmotnosti m, resp. zrychlení

$$F = G\frac{mM_\oplus}{R_\oplus^2}\,, \quad a_\mathrm{g} = G\frac{M_\oplus}{R_\oplus^2}\,.$$

Vzorce jsme napsali zatím pro původní situaci s plnou planetou. Protože se má změnit pouze hmota planety, a to tak, že obě mají mít stejnou hustotu, ale nová bude dutá, pak se bude původní a nové zrychlení lišit pouze objemem. Objem duté koule vyjádřený pomocí D a $R_\oplus$ je

$$V_\mathrm{D} = \frac{4}{3}\pi\left(R_\oplus^3 - (R_\oplus - D)^3\right) = \frac{4}{3}\pi\left(3R_\oplus^2 D - 3R_\oplus D^2 + D^3\right)$$

Gravitační zrychlení na povrchu duté planety bude

$$a_\mathrm{D} = \frac{V_\mathrm{D}}{V_\oplus}a_\mathrm{g} = \frac{3R_\oplus^2 D - 3R_\oplus D^2 + D^3}{R_\oplus^3}a_\mathrm{g} \doteq 0{,}046\,3\,g\,.$$

Gravitační zrychlení na povrchu duté planety by bylo méně jak pětiprocentní oproti povrchu plné Země. Čím tenčí je slupka, tím spíše bychom mohli zanedbat druhý a třetí člen v součtu. V případě zanedbání druhého a třetího členu by se výsledek lišil už na druhé platné cifře. Zanedbání pouze třetího členu se projeví až na páté platné cifře.

Podle zadání jsme uvažovali pouze gravitační zrychlení a ne tíhové. Zanedbali jsme tedy rotaci Země. Kdybychom chtěli uvážit korektně zrychlení, které budeme pociťovat na planetě, museli bychom znát i konkrétní polohu a rychlost rotace. Tu jsme dokonce ani neměli zadanou – mluvilo se o Zemi, ale ne o tom, jestli myšlená planeta bude rotovat stejně či jinak ve srovnání se Zemí. Dokonce by se dalo usuzovat, že pokud by měla být stabilní, měla by rotovat pomaleji při své nižší hmotnosti.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha 26 ... kmitající kladka 5 bodů

Mějme nehmotnou kladku visící ze stropu na pružině o tuhosti $k = 80\,\mathrm{N/m}$. Přes tuto kladku je přehozené nehmotné lano, přičemž jeden jeho konec je připevněný k zemi a na druhém visí těleso o hmotnosti $m = 1\,\mathrm{kg}$. Pokud těleso trochu stáhneme dolů a pustíme, jaká bude perioda malých kmitů soustavy? *Lego má rád kmity a kladky, tak je konečně spojil.*

Keď potiahneme teleso o x nadol, kladka sa pohne smerom dole len o $x/2$. To vyplýva napríklad z úvahy, že keby sme potiahli oba konce lana visiace cez kladku o x, aj kladka sa pohne o x. My sme však potiahli o x len jeden koniec, zatiaľ čo ten druhý je fixovaný na mieste, takže kladka sa pohne o $x/2$.

Tým pádom sa pružina natiahne o $x/2$, čiže sila, ktorou pružina ťahá kladku nahor sa zväčší o $kx/2$. Otázka ale znie, ako sa zväčší sila, ktorou pôsobí lano na teleso? Kladka je nehmotná, takže sila na ňu pôsobiaca musí byť vždy nulová. Aj lano je nehmotné, takže pnutie v ňom musí byť tiež rovnaké po celej jeho dĺžke. Obe strany lana visiace z kladky ju teda ťahajú dole rovnakou silou. Takže ak narástla sila, ktorou pružina ťahá kladku hore o $kx/2$, tak pnutie v lane musí vzrásť o polovicu tejto hodnoty, čiže $kx/4$.

A teda, keď teleso potiahneme o x dole, tak sila, ktorou ho lano ťahá hore vzrastie o $kx/4$. Čiže tuhosť, ktorú teleso pociťuje je $(kx/4)/x = k/4$. Následne stačí dosadiť do vzorca pre periódu lineárneho harmonického oscilátora a dostávame

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k/4}} = 4\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 1{,}4\,\mathrm{s}\,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha 27 ... jeden zvýšil, druhý narostl 5 bodů

Lega chytili lidojedi a zavřeli ho do chatrče, ve které má ideální zdroj stejnosměrného napětí, hodně dokonalých vodičů a několik rezistorů, kterým lze měnit odpor (tedy reostatů). Aby ho lidojedi nesnědli, musí sestavit takový obvod, aby v něm existoval reostat, kterému když zvýší odpor, tak v nějakém jiném reostatu v obvodu vzroste proud. Kolik minimálně reostatů musí takový obvod obsahovat? Pokud takový obvod neexistuje, uveďte jako odpověď 0.

Lego netuší, jestli by se z něj vůbec někdo najedl...

Začneme úvahou od najmenšieho (teoreticky) možného počtu reostatov. Uvedomíme si, že pre 1 reostat dané podmienky splniť nebude možné, nakoľko ak na ňom zvýšime odpor, prúd idúci cez neho klesne (a iný reostat, ktorý by splnil druhú podmienku, v obvode nie je).

Pozrieme sa teda na prípad 2 reostatov. Ak ich zapojíme do série, zvyšovaním odporu na ktoromkoľvek z nich znižujeme prúd prechádajúci cez oba reostaty, opäť teda nespĺňame druhú podmienku. Ak dva reostaty zapojíme paralelne, a na jednom z nich zvýšime odpor, prúd idúci cez neho klesne a prúd idúci cez druhý reostat ostane nezmenený. Napriek tomu, že sme stále nedospeli k správnemu riešeniu, možno intuitívne cítite, že sa k nemu blížime.

Prejdeme teda na prípad 3 reostatov. Uvedomíme si, že výhradne sériové alebo výhradne paralelné zapojenia sa budú správať analogicky k prípadu dvoch reostatov. Ak zapojíme 2 reostaty sériovo a tretí k nim paralelne, opäť dostaneme situáciu zhodnú s dvomi paralelne zapojenými reostatmi. Vyhodnotíme teda ďalšiu možnosť zapojenia – dva reostaty (označme ich R_1 a R_2) zapojené paralelne a tretí (R_3) k nim zapojíme do série. Pri zvyšovaní odporu R_3 prúd prechádzajúci cez zvyšné 2 reostaty klesá a naopak, zvyšovaním odporov R_1 a R_2 klesá prúd idúci cez R_3 (neuvažujeme prípad kedy je jeden z dvojice R_1 a R_2 nulový, nakoľko by sa prúd opäť nemenil, čo nie je prípad ktorý hľadáme). Zamyslime sa však, čo sa bude diať s prúdom idúcim cez R_2, ak budeme zvyšovať odpor R_1.

Najprv si potrebujeme vyjadriť prúd idúci cez R_2 (označme ho I_2, ostatné prúdy analogicky). Celkový prúd idúci obvodom je teda zároveň rovný I_3. V mieste, kde sa obvod vetví sa musí celkový prúd I_3 rozdeliť medzi dve vetvy, rozdelí sa v obrátenom pomere odporov (cez menší odpor pôjde väčší prúd). Cez R_2 teda pôjde prúd $I_2 = I_3R_1/(R_1 + R_2)$. Potrebujeme ale ešte spočítať celkový prúd I_3, získame ho ako pomer napätia U na zdroji a celkového odporu. Celkový odpor je súčet odporu R_3 a paralelného zapojenia, ktoré má odpor $R_1R_2/(R_1 + R_2)$. Celkový prúd je

$$I_3 = \frac{U}{R_3 + R_1R_2/(R_1 + R_2)} = U\frac{R_1 + R_2}{R_1R_3 + R_2R_3 + R_1R_2}\,.$$

Pomocou tohto si môžeme vyjadriť prúd idúci cez R_2

$$I_2 = I_3\frac{R_1}{R_1 + R_2} = U\frac{R_1}{R_1 + R_2}\frac{R_1 + R_2}{R_1R_3 + R_2R_3 + R_1R_2} = U\frac{R_1}{R_1R_3 + R_2R_3 + R_1R_2}\,.$$

Rovnaký výsledok by sme dostali ak by sme najprv spočítali, ako sa rozdelí napätie, a následne spočítali pomer napätia na paralelnom zapojení a R_2.

Poďme však späť k hlavnej otázke – je možnosť, že zvýšením R_1 narastie I_2? Neostáva nám snáď iná možnosť, než výsledok zderivovať podľa R_1

$$\frac{\partial I_2}{\partial R_1} = U\frac{R_1R_3 + R_2R_3 + R_1R_2 - R_1(R_3 + R_2)}{(R_1R_3 + R_2R_3 + R_1R_2)^2} = U\frac{R_2R_3}{(R_1R_3 + R_2R_3 + R_1R_2)^2}\,.$$

Dostávame, že derivácia I_2 podľa R_1 je (pre kladné odpory) vždy kladná, t.j. prúd idúci cez odpor R_2 rastie s odporom R_1. Dostali sme teda presne taký obvod, aký ľudožrúti po Legovi požadovali, na zostavenie tohto obvodu sme potrebovali 3 reostaty. Zároveň sme si na začiatku riešenia overili, že pre nižší počet reostatov splniť podmienky ľudožrútov nepôjde. Správna odpoveď na otázku teda je, že daný obvod musí obsahovať minimálne 3 reostaty.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha 28 ... Doppler na cestě domů

6 bodů

Christian Doppler šel jednou domů. Po chvíli si všiml, že v obou směrech (v jeho směru i v protisměru) chodí lidé rychlostí $v = 1{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ s rozestupy $l = 4{,}0\,\mathrm{m}$. Rozhodl se, že toho využije a najde rychlost, jakou se má pohybovat, aby cestou domů potkal co nejméně lidí. Jaký je minimální počet lidí, které Doppler potká cestou domů, když je od svého domu vzdálený $d = 5{,}2\,\mathrm{km}$? Můžete předpokládat, že $d \gg l$, relativistické efekty neuvažujte.

Legolas je tak trochu autík.

Označme v_D Dopplerovu rýchlosť. Potom čas, ktorý uplynie medzi stretnutím dvoch oprotiidúcich ľudí bude

$$t_\mathrm{p} = \frac{l}{v + v_\mathrm{D}}\,.$$

Z toho plynie frekvencia stretávania protiidúcich ľudí

$$f_\mathrm{p} = \frac{1}{t_\mathrm{p}} = \frac{v + v_\mathrm{D}}{l}\,.$$

Obdobne určíme frekvenciu stretávania ľudí idúcich v rovnakom smere ako

$$f_\mathrm{r} = \frac{1}{t_\mathrm{r}} = \frac{|v - v_\mathrm{D}|}{l}\,.$$

Absolútna hodnota potom rozdeľuje riešenie na dva prípady, kedy okoloidúci obiehajú[3] Dopplera ($v_\mathrm{D} \leq v$), a prípad keď Doppler obieha okoloidúceho ($v_\mathrm{D} \geq v$).

Počet ľudí, ktorých Doppler stretne je súčinom celkovej frekvencie stretávania a času, ktorý bude Dopplerovi pri danej rýchlosti trvať cesta domov, čiže $t = \frac{d}{v_\mathrm{D}}$. Pod celkovou frekvenciou myslíme súčet frekvencii stretávania ľudí v jednom a druhom smere. V skutočnosti sa jedná skôr o akúsi priemernú frekvenciu, nakoľko nám ale stačí celkový počet ľudí, ktorý stretne a vieme, že ich stretne veľmi veľa (lebo $d \gg l$), úplne nám stačí tento údaj.

Aby sme sa zbavili absolútnej hodnoty, rozdeľme si problém na vyššie diskutované prípady.

Okoloidúci obiehajú Dopplera ($v_\mathrm{D} \leq v$)

Výsledná frekvencia bude

$$f_\mathrm{v} = \frac{v + v_\mathrm{D}}{l} + \frac{v - v_\mathrm{D}}{l} = 2\frac{v}{l}\,,$$

čo je konštanta nezávislá od Dopplerovej rýchlosti. Celkový počet ľudí, ktorých cestou stretne tak bude

$$N = f_\mathrm{v} t = 2\frac{v}{l}\frac{d}{v_\mathrm{D}}\,.$$

Minimum je zjavne pre maximálnu hodnotu v_D. Máme podmienku $v_\mathrm{D} < v$, takže najmenší počet ľudí, ktorých môže stretnúť bude v tomto prípade $N_\mathrm{min} = 2d/l$.

Doppler obieha okoloidúceho ($v_\mathrm{D} \geq v$)

Výsledná frekvencia bude

$$f_\mathrm{v} = \frac{v + v_\mathrm{D}}{l} + \frac{v_\mathrm{D} - v}{l} = 2\frac{v_\mathrm{D}}{l}\,.$$

Celkový počet ľudí, ktorých cestou stretne teda bude

$$N = f_\mathrm{v} t = 2\frac{v_\mathrm{D}}{l}\frac{d}{v_\mathrm{D}} = 2\frac{d}{l} = N_\mathrm{min}\,,$$

takže pri rýchlostiväčšej ako v stretne Doppler cestou domov vždy N_min ľudí. Minimálny počet ľudí, ktorých môže stretnúť na ceste domov je $N_\mathrm{min} = 2d/l = 2\,600$.

Za povšimnutie stojí, že ak by sme zástup okoloidúcich interpretovali ako vlnu s vlnovou dĺžkou l a rýchlosťou šírenia v, teda s frekvenciou $f_0 = \frac{v}{l}$, dostávame rozšírením výrazu pre frekvenciu stretávania

$$f_\mathrm{p} = \frac{v + v_\mathrm{D}}{l}\frac{v}{v} = \frac{v + v_\mathrm{D}}{v} f_0$$

vzťah pre Dopplerov posun s pohybujúcim sa pozorovateľom, ako aj analogicky pre f_r.

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

[3] prípadne cestujú rovnako rýchlo

Úloha 29 ... žlička 5 bodů

Jarda vytáhl z myčky lžičku a pověsil ji na stojan na příbory. Jelikož samozřejmě nevěší příbory dokonale, lžička se na stojanu po pověšení houpe ze strany na stranu. Zjistěte, jaká je perioda jejích kmitů, pokud ji aproximujeme jako rovinný útvar tvořený kruhem o poloměru $R = 1{,}5\,\mathrm{cm}$*, na jehož okraj nasedá obdélník o šířce* $a = 0{,}7\,\mathrm{cm}$ *a délce* $b = 9\,\mathrm{cm}$*. Lžička má tloušťku* $1\,\mathrm{mm}$ *a je vyrobena z materiálu o hustotě* $\rho = 8000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$*. Malý otvor pro pověšení na stojan se nachází ve vzdálenosti* $s = 1\,\mathrm{cm}$ *od konce lžičky uprostřed její šířky.*

Jardovi chybí na kolejích myčka na nádobí.

Použijeme vztah pro periodu fyzického kyvadla

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}\,,$$

kde J označuje moment setrvačnosti tělesa vůči ose otáčení, m je hmotnost tělesa, g tíhové zrychlení a d reprezentuje vzdálenost těžiště od osy otáčení. Těžiště se nachází na ose souměrnosti lžičky, stačí nám tedy vyšetřovat jednu souřadnici. Vzdálenost budeme odměřovat od konce lžičky na kratší straně obdélníka. Těžiště obdélníka pak leží ve vzdálenosti $x_1 = \frac{b}{2}$, těžiště kruhu v $x_2 = b + R$. Pro nalezení polohy těžiště celého předmětu využijeme vztah

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}\,.$$

Protože tloušťka lžičky je konstantní, hmotnosti jednotlivých částí jsou úměrné jejich plochám. Polohu těžiště tak najdeme jako

$$x = \frac{ab\frac{b}{2} + \pi R^2\left(b + R\right)}{ab + \pi R^2} = 7{,}67\,\mathrm{cm}\,,$$

a vzdálenost těžiště od osy otáčení je proto $d = x - s = 6{,}67\,\mathrm{cm}$. Nyní ještě potřebujeme spočítat moment setrvačnosti. Ten bude součtem momentu setrvačnosti kruhu a obdélníka, u obou útvarů vztažený k ose otáčení. Moment setrvačnosti kruhu vůči ose procházející jeho středem je $\frac{1}{2}m_\mathrm{k}R_\mathrm{k}^2 = \frac{1}{2}\pi\rho tR_\mathrm{k}^4$, kde m_k označuje hmotnost kruhu a R_k jeho poloměr. Pomocí Steinerovy věty najdeme moment setrvačnosti této části lžíce vzhledem k její ose otáčení jako

$$J_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m_\mathrm{k}R_\mathrm{k}^2 + m_\mathrm{k}\left(b + R - s\right)^2 = \pi R^2 t\rho\left(\frac{R^2}{2} + \left(b + R - s\right)^2\right)\,,$$
$$J_\mathrm{k} \doteq 5{,}167\cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,.$$

Podobným způsobem najdeme moment setrvačnosti obdélníka vůči ose otáčení lžíce (vůči ose procházející jeho středem by měl hodnotu $\frac{1}{12}m_\mathrm{o}\left(a^2 + b^2\right)$) jako

$$J_\mathrm{o} = \frac{1}{12}m_\mathrm{o}\left(a^2 + b^2\right) + m_\mathrm{o}\left(\frac{b}{2} - s\right)^2 = abt\rho\left(\frac{a^2 + b^2}{12} + \left(\frac{b}{2} - s\right)^2\right)\,,$$
$$J_\mathrm{o} \doteq 9{,}597\cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,.$$

Hmotnost celé lžičky je zřejmě

$$m = m_\mathrm{o} + m_\mathrm{k} = t\rho\left(ab + \pi R^2\right)\,,$$
$$m \doteq 10{,}69\,\mathrm{g}\,.$$

Výsledný vztah pro periodu má proto podobu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\pi R^2\left(\frac{R^2}{2} + (b+R-s)^2\right) + ab\left(\frac{a^2+b^2}{12} + \left(\frac{b}{2}-s\right)^2\right)}{g\left(ab\frac{b}{2} + \pi R^2\,(b+R) - s\left(ab + \pi R^2\right)\right)}}\,,$$

$$T \doteq 0{,}59\,\mathrm{s}\,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 30 ... na pláži

6 bodů

Jarda si se svými kamarády háže míčem na pláži u moře. Ve vodě se dokáže pohybovat rychlostí $0{,}7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, zatímco na souši je to $1{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Jarda stojí přesně na rovné hraně vody a pláže a ví, že míč do jeho blízkosti dopadne přesně za 3 vteřiny. Jak velká je plocha, na kterou může dopadnout míč, aby ho Jarda stihnul chytit ve vzduchu?

Jarda byl u moře v Řecku, místo aby vymýšlel úlohy.

Jarda má tři možnosti, kudy se vydat. První je po pláži, kde se za čas $t = 3\,\mathrm{s}$ může dostat do vzdálenosti $s_\mathrm{s} = v_\mathrm{s} t$ kterýmkoli směrem. Může tak pokrýt plochu o velikosti

$$S_\mathrm{s} = \frac{\pi s_\mathrm{s}^2}{2} \doteq 14{,}14\,\mathrm{m}^2\,.$$

Druhou možností je analogicky běžet vodou, zde je maximální vzdálenost $s_\mathrm{v} = v_\mathrm{v} t$. Je tu ovšem ještě třetí, kombinovaná možnost. Poběží po pláži, přesně po hranici pevniny, a v nějakém okamžiku se začne pohybovat vodou.

Pro popis tohoto pohybu použijeme analogii s lomem světla. To se pohybuje po křivkách s nejkratším časem, jinak řečeno, za nějaký čas urazí největší možnou vzdálenost. To je přesně to, co potřebujeme. Jardův pohyb popíšeme pomocí Snellova zákona, přičemž rozhraní je samozřejmě hranice vody a pláže. Ve Snellově zákoně jsou ovšem nějaké indexy lomu, které se ale u této pláže nekoupou. Zákon si tak musíme trochu upravit. Podle definice je index lomu poměr rychlosti světla ve vakuu c a rychlosti světla v daném prosředí v. Pak můžeme Snellův zákon přepsat na tvar

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2}\,.$$

Úhel α_1 je v našem případě pravý, protože se Jarda pohybuje po rozhraní. Pak úhel od kolmice ke břehu, pod kterým se Jarda vydá do vody, bude roven

$$\alpha_2 = \arcsin\frac{v_\mathrm{v}}{v_\mathrm{s}}\,.$$

Ať se vydá do vody kdekoli, vždy to pro něj bude nejlepší pod tímto úhlem od kolmice k rozhraní vody a pláže. Označme x vzdálenost od jeho počáteční polohy do místa, kde se rozhodne jít do vody. Pak ve vodě stihne urazit vzdálenost

$$s_x = v_\mathrm{v}\left(t - \frac{x}{v_s}\right)\,.$$

Hranice, kam tímto způsobem dorazí, je úsečka. Jeden konec je na pomezí pláže a vody 3,0 m od počátku a druhý je ve vodě 2,1 m od počátku pod úhlem α_2 od kolmice ke břehu. Plocha, které lze takto dosáhnout, má pak tvar pravoúhlého trojúhelníku a velikost

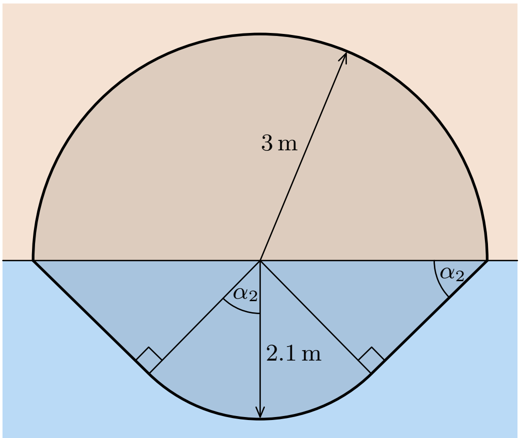
$$S_\mathrm{k} = \frac{1}{2} v_\mathrm{v} t^2 \sqrt{v_\mathrm{s}^2 - v_\mathrm{v}^2} \doteq 2{,}25\,\mathrm{m}^2\,.$$

Pro pohyb pouze ve vodě tak zbývá už jen kruhová výseč s úhlem α_2. Ta má plochu

$$S_\mathrm{v} = \frac{\alpha_2}{2\pi} \pi s_\mathrm{v}^2 \doteq 1{,}70\,\mathrm{m}^2\,.$$

Poslední dvě uvedené plochy musíme uvažovat vzhledem k symetrii dvakrát. Celkově tak může pokrýt plochu

$$S = S_\mathrm{s} + 2\left(S_\mathrm{k} + S_\mathrm{v}\right) = \frac{\pi \left(v_\mathrm{s} t\right)^2}{2} + v_\mathrm{v} t^2 \sqrt{v_\mathrm{s}^2 - v_\mathrm{v}^2} + \arcsin \frac{v_\mathrm{v}}{v_\mathrm{s}} \left(v_\mathrm{v} t\right)^2 \doteq 22{,}1\,\mathrm{m}^2\,.$$

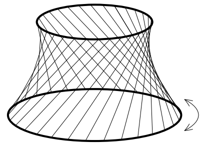


Obr. 4: Znázornění Jardova účinného průřezu.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 31 ... kmitající obruč reloaded

6 bodů



Mějme dvě obruče, přičemž horní s poloměrem $r = 1{,}0\,\mathrm{m}$ je pevně uchycena ve vodorovné rovině a spodní s poloměrem $R = 1{,}5\,\mathrm{m}$ je k té horní přivázána několika nehmotnými lanky tak, že všechna jsou stejně dlouhá a při pohledu shora směřují radiálně. Čili spodní obruč taky leží ve vodorovné rovině a její vzdálenost od roviny horní obruče je $h_0 = 2{,}0\,\mathrm{m}$. Nechť má spodní obruč hmotnost $m = 1{,}0\,\mathrm{kg}$. Když s ní trochu pootočíme, jakou bude mít periodu malých kmitů? *Lego upravil svoji úlohu z minulého ročníku.*

Ako je to vo fyzike takmer so všetkým, aj periódu malých kmitov možno vypočítať viacerými spôsobmi. Ukážeme si tu jeden menej známy (áno, mohli ste ho vidieť pri riešení veľmi podobnej úlohy vo Fyziklání online 2020), ale zato veľmi efektívny spôsob riešenia tohto problému.

Postup spočíva vo využítí zákona zachovania energie. Ako vhodnú súradnicu na popis problému si zvolíme uhol pootočenia spodnej obruče z rovnovážnej polohy φ.

Kinetická energia rotujúcej tenkej obruče je

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} mR^2\dot{\varphi}^2 \,.$$

S potenciálnou energiou je to trochu zložitejšie. Pozrime sa na jedno lanko a označme si jeho dĺžku l. Ak ďalej označíme horizontálnu vzdialenosť bodov, v ktorých je lanko uchytené k obručiam, ako d a obdobne ich vertikálnu vzdialenosť ako h, dostaneme z Pytagorovej vety, že vždy musí platiť $l^2 = h^2 + d^2$. V rovnovážnej polohe platí $d = R - r$ a $h = h_0$, preto celkovo dostávame $l^2 = h_0^2 + (R - r)^2$. Pre vyjadrenie potenciálnej energie je podstatná práve zmena vzdialenosti rovín, v ktorých obruče ležia.

Potrebujeme určiť d po vychýlení o uhol φ. Tým, že sa jedná o horizontálnu vzdialenosť, si môžeme nakresliť tento problém v rovine. Pri pohľade zhora sú body, v ktorých je lanko prichytené v rovnovážnej polohe ($\varphi = 0$) na jednej priamke so stredom obručí. Po pootočení jednej z obručí o φ dostávame trojuholník so stranami R, r, d, kde strany R, r zvierajú uhol φ. Vzdialenosť d dostaneme pomocou kosínusovej vety

$$d^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi \,.$$

Z Pytagorovej vety teda pre novú vzdialenosť medzi obručami dostávame

$$h^2 = l^2 - R^2 - r^2 + 2Rr\cos\varphi \,.$$

Dosadíme za l^2 a ďalej využijeme, že pre $\varphi \ll 1$ platí $\cos\varphi \approx 1 - \varphi^2/2$. Potom

$$h^2 = h_0^2 + (R - r)^2 - R^2 - r^2 + 2Rr\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) = h_0^2 - Rr\varphi^2 \,.$$

Nás však zaujíma hlavne zmena vzdialenosti voči rovnovážnemu prípadu. Pre malé x môžeme využiť aproximáciu $(1 + x)^a \approx 1 + ax$. Celkovo tak úpravou dostávame

$$\Delta h = h_0\sqrt{1 - \frac{Rr\varphi^2}{h_0^2}} - h_0 \approx -\frac{Rr\varphi^2}{2h_0} \,.$$

Voči svojej nevychýlenej polohe sa spodná obruč zdvihla o $-\Delta h$. Zmena potenciálnej energie je potom

$$E_\mathrm{p} = -mg\Delta h = \frac{1}{2}\frac{mgRr}{h_0}\varphi^2 \,.$$

Pripomeňme si, že pre lineárny harmonický oscilátor (hmotný bod na pružinke) je kinetická a potenciálna energia daná ako

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \,,$$
$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2} k x^2 \,.$$

Perióda kmitov je potom $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Ostáva nám všimnúť si, že odvodené vzťahy pre energiu nášho systému môžeme zavedením efektívnych hodnôt pre hmotnosť $m_\mathrm{ef} = mR^2$ a tuhosť $k_\mathrm{ef} = \frac{mgRr}{h_0}$ previesť na prípad LHO, nakoľko perióda kmitov nezávisí na voľbe súradníc, v ktorých oscilátor popisujeme. Celkovo preto platí

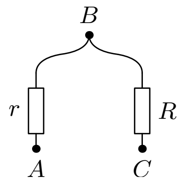
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_\mathrm{ef}}{k_\mathrm{ef}}} = 2\pi\sqrt{\frac{mR^2}{\frac{mgRr}{h_0}}} = 2\pi\sqrt{\frac{Rh_0}{rg}} \doteq 3{,}5\,\mathrm{s}\,.$$

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha 32 ... konečný obvod

6 bodů

Na obrázku vidíte fragment elektrického obvodu s rezistory $r = 2{,}35\,\Omega$ a $R = 271{,}2\,\Omega$. Fragmenty můžeme spojovat dohromady podle několika pravidel:



- *Každý konektor A (kromě prvního fragmentu) musí být připojen k právě jednomu B.*
- *Obdobně každý B (kromě posledního) je nutné spojit s jedním A.*
- *Všechny konektory C musí být zapojeny do jednoho bodu.*
- *Jiná spojení nejsou povolena.*

Následně propojíme konektory A a C z prvního fragmentu s jednou svorkou multimetru, na druhou připojíme B toho posledního. Kolik nejméně fragmentů musíme spojit, abychom naměřili větší odpor než $R_x = 23{,}7\,\Omega$?

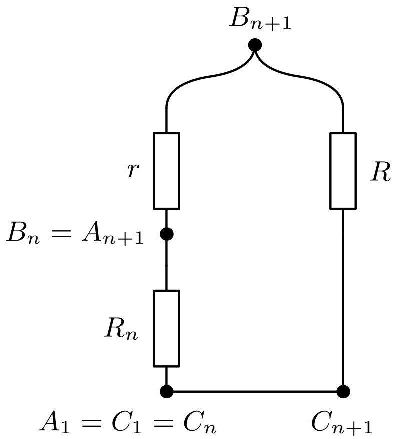
Jáchym chtěl vymyslet úlohu s pružinkou, ale nějak mu to nevyšlo.

Označme R_n odpor n fragmentů. Z obrázku 5 vyplývá

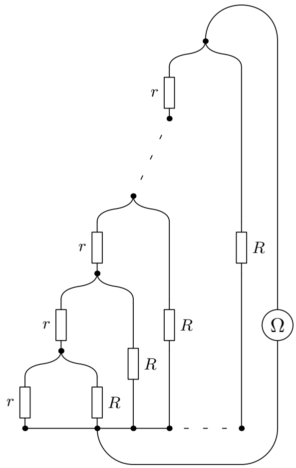
$$R_{n+1} = \frac{(r + R_n)\,R}{r + R_n + R} \,,$$

kde R_0 definujeme jako $R_0 = 0$. Hledáme takové přirozené číslo n, pro které platí $R_n \geq R_x$. Můžeme si na to napsat jednoduchý skript, ale postačí i tabulkový procesor. Výsledkem je $n = 26$.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz



Obr. 5: Schéma zapojení pro fragment $n + 1$.



Obr. 6: Schéma zapojení celého obvodu.

Úloha 33 ... křivá střecha

6 bodů

Lije tak moc, že za hodinu spadne 20 mm *srážek. Střecha starší budovy ve tvaru obdélníku s rozměry* $a = 20\,\mathrm{m}$ *a* $b = 10\,\mathrm{m}$ *má zanedbatelný sklon, ale dostatečný na to, že všechna voda ze střechy stéká do jednoho místa a odtud padá na zem. Jakou silou působí proud vody dopadající na zem, když se po dopadu odrazí směrem nahoru s rychlostí pětkrát* ($k = 5$) *menší než byla před dopadem? Voda ze střechy odtéká tak rychle, že se na ní udržuje konstantní množství vody. Střecha je ve výšce* $h = 3\,\mathrm{m}$ *nad zemí. Uvažujte, že voda odtékajíci ze střechy má nulovou počáteční rychlost ve vertikálním směru.* *Danka šla okolo budovy s křivou střechou v lijáku.*

Silu, ktorou voda (padajúca zo strechy a odrážajúca sa od zeme) pôsobí na zem, spočítame pomocou 2. Newtonovho zákona ako

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta m \Delta v}{\Delta t}\,.$$

Uvedomíme si, že $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ je vlastne hmotnostný tok Q_m daný hmotnosťou vody, ktorá v každom okamihu spadne zo strechy. Teda

$$Q_m = Rab\rho\,,$$

kde $R = 20\,\mathrm{mm{\cdot}h^{-1}} = 5{,}55\,\mathrm{\mu m{\cdot}s^{-1}}$ a $\rho = 998\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ je hustota vody. Pre veľkosť zmeny rýchlosti vody pri odraze platí

$$\Delta v = v_0 + \frac{v_0}{k} = v_0\left(1 + \frac{1}{k}\right)\,,$$

kde rýchlosť prúdu vody pri dopade na zem v_0 spočítame z jej voľného pádu ako $v_0 = \sqrt{2gh}$, kde uvažujeme, že potenciálna energia vody vo výške h sa zmenila na kinetickú energiu.

Po dosadení týchto vyjadrení do vzťahu pre silu dostávame

$$F = Rab\rho\sqrt{2gh}\left(1 + \frac{1}{k}\right) .$$

Po dosadení príslušných hodnôt zistíme, že prúd vody tlačí na zem silou $F \doteq 10{,}2\,\mathrm{N}$.

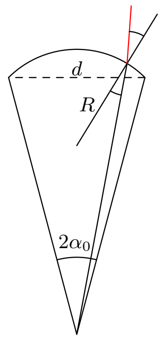
Daniela Pittnerová
`daniela@fykos.cz`

Úloha 34 ... ommatidium

6 bodů

Hmyz má oči složené z mnoha jednotlivých malých částí, takzvaných ommatidií. Každé ommatidium můžeme považovat za plný kužel s vrcholovým úhlem $2\alpha_0 = 14^\circ$. Ve vrcholu tohoto kuželu jsou umístěny fotoreceptory. Na druhé straně je kužel uzavřen kulovou plochou o poloměru $R = 17\,\mathrm{\mu m}$, která je souosá s kuželem. Na povrchu je průměr ommatidia $d = 25\,\mathrm{\mu m}$. Určete, jaký prostorový úhel může vnímat jedno ommatidium, jestliže je jeho vnitřek vyplněn prostředím o indexu lomu $n = 1{,}3$.

Jarda si zkusil školní studentský projekt.



Úlohu řešme naopak – představme si, že paprsek vychází z fotoreceptorů do prostoru ommatidia a láme se na kulové ploše směrem do okolního světa. Nechť takový paprsek vychází pod úhlem α od osy kuželu. Pak dopadá na kulovou plochu pod úhlem γ počítaným od kolmice, tedy od přímky spojující střed křivosti a bod lomu paprsku. Ze sinové věty můžeme určit sinus úhlu γ jako

$$\sin\gamma = \frac{l}{R}\sin\alpha ,$$

kde l je vzdálenost středu křivosti povrchu ommatidia od vrcholu vnitřního kuželu. Tu ze známých hodnot najdeme jako

$$l = \frac{d}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha_0} - \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} = 90{,}3\,\mathrm{\mu m} .$$

Podle Snellova zákona najdeme výstupní úhel φ od kolmice ke kulové ploše jako

$$\sin\varphi = n\sin\gamma = n\frac{l}{R}\sin\alpha .$$

Pokud tento úhel odečteme od úhlu, který svírá spojnice bodu lomu na kulové ploše a středu křivosti s osou kuželu, dostaneme směr paprsku vzhledem k ose kuželu. Úhel tohoto směru lze vyjádřit jako

$$\beta = 180 - (180 - \gamma - \alpha) - \varphi = \gamma + \alpha - \varphi = \arcsin\left(\frac{l}{R}\sin\alpha\right) + \alpha - \arcsin\left(n\frac{l}{R}\sin\alpha\right) .$$

Můžeme například graficky ověřit, že tato funkce je záporná a klesající. Extrémních hodnot tak nabývá na okraji ommatidia, tedy když $\alpha = \alpha_0 = 7^\circ$. Pro tuto hodnotu se do vrcholu kuželu dostanou i paprsky jdoucí $|\beta| = 10{,}0^\circ$ od osy ommatidia. Protože $|\beta| > \alpha_0$, je zorný úhel ommatidia větší než jeho úhlový průměr. Protože byla hodnota úhlu β záporná, vidí ommatidium všechno obráceně vůči své ose. Prostorový úhel určíme jako poměr plochy, kterou vytíná kulový vrchlík o vrcholovém úhlu 2β na kouli, ku kvadrátu poloměru této koule, tedy

$$\Omega = \frac{2\pi Rv}{R^2} = \frac{2\pi R^2\left(1-\cos\beta\right)}{R^2} = 2\pi\left(1-\cos\beta\right) = 0{,}095\,\mathrm{sr}\,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 35 ... termodynamický kanón 6 bodů

Máme vodorovně položený válec s podstavou $S = 2{,}5\,\mathrm{dm}^2$ a délkou $l = 2\,\mathrm{m}$, jehož jeden konec je uzavřený a druhý ne. Ve válci se nachází píst o hmotnosti $m = 24\,\mathrm{kg}$, který se v něm může pohybovat bez tření a dokonale těsní. Objem plynu mezi pístem a uzavřeným koncem je $V_0 = 3{,}5\,\ell$. Nejprve je vše v klidu a rovnováze – tlak venku i mezi pístem a uzavřeným koncem je roven normálnímu atmosférickému tlaku, taktéž teplota je všude T_0. Potom ale v jednom momentě dojde k výbuchu – teplota uzavřené části plynu se změní na $10T_0$ a látkové množství se zde zdvacetinásobí. Jakou rychlostí opustí píst válec? Předpokládejte klasickou rovnovážnou termodynamiku a že plyn má Poissonovu konstantu $\kappa = 1{,}4$. Lego si chtěl z někoho vystřelit.

Povedzme, že časti plynu zavretej medzi piestom a uzavretým koncom valca budeme hovoriť „vnútro kanóna“ a všetkému ostatnému plynu „vonkajšok kanóna“.

Čo sa bude diať s plynom vonku? Objem plynu vonku môžeme považovať za nekonečný. To, že ho trochu stlačíme (tým ako piest pôjde von z valca) nemá ako ovplyvniť jeho tlak, a teda smerom dovnútra bude piest vždy tlačiť tlak p_0.

Čo sa bude diať vnútri? Proces sa zrejme odohrá veľmi rýchlo, takže nebude čas na výmenu tepla. Musíme preto uvažovať adiabatický dej, pre ktorý platí, že sa zachováva hodnota súčinu pV^κ. Stačí nám teda spočítať, aký bude tlak na začiatku a následne vieme pre každú polohu piestu tlak vnútri spočítať ako

$$p_{\mathrm{in}} = p_{\mathrm{in}_0}\left(\frac{V_0}{V}\right)^\kappa\,,$$

kde okamžitý objem V spočítame ako súčin plochy podstavy valca S a vzdialenosti hrany piestu od uzavretého konca x. Na začiatku je táto vzdialenosť $x_0 = V_0/S = 14\,\mathrm{cm}$. Zostáva teda spočítať tlak okamžite po výbuchu, na čo využijeme stavovú rovnicu $pV = nRT$. Výbuchom sa na pravej strane zdesaťnásobí teplota a zdvadsaťnásobí látkové množstvo, pravá strana teda narastie dvestonásobne. Na ľavej strane je objem v okamihu po výbuchu stále rovnaký, takže ľavá sa musí 200-krát zväčšiť tým, že dvestonásobne narastie tlak, čiže $p_{\mathrm{in}_0} = 200p_0$.

Sila pôsobiaca na piest bude výsledne $F = S\left(p_{\mathrm{in}} - p_0\right)$. Niekto by sa mohol uchýliť k riešeniu diferenciálnej rovnice, to ale nie je vôbec potrebné – stačí túto silu zintegrovať po celej dráhe a dostaneme prácu, ktorú plyn na pieste vykonal

$$W = \int_{x_0}^{l} S\left(200p_0\left(\frac{V_0}{Sx}\right)^\kappa - p_0\right)\mathrm{d}x = \left[Sp_0\left(200\left(\frac{V_0}{S}\right)^\kappa\frac{1}{1-\kappa}x^{1-\kappa} - x\right)\right]_{x_0}^{l}$$
$$= Sp_0\left(200\left(\frac{V_0}{S}\right)^\kappa\frac{1}{1-\kappa}\left(l^{1-\kappa} - x_0^{1-\kappa}\right) - \left(l - x_0\right)\right)\,.$$

Ďalej stačí dosadiť za x_0 a túto prácu položiť rovnú kinetickej energii piestu

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}W} = \sqrt{\frac{2}{m}Sp_0\left(200\left(\frac{V_0}{S}\right)^{\kappa}\frac{1}{1-\kappa}\left(l^{1-\kappa}-\left(\frac{V_0}{S}\right)^{1-\kappa}\right)-\left(l-\frac{V_0}{S}\right)\right)} \doteq 96\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Ak by sa niekto chcel vyhnúť aj integrovaniu, dá sa k rovnakému výsledku dospieť pomocou vzorca na prácu pri adiabatickom procese (môžeme si všimnúť, že aj náš výsledok je v tvare „práca vykonaná na pieste je rovná rozdielu práce vykonanej plynom vnútri a práce vykonanej na plyn vonku“).

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha 36 ... těžiště hlemýždě

6 bodů

Jak daleko od středu spirály se nachází její těžiště, je-li v polárních souřadnicích zadána jako $r = a\varphi$, kde $a = 0{,}1\,\mathrm{m{\cdot}rad^{-1}}$ a φ označuje úhel v radiánech? Spirála má konstantní délkovou hustotu λ a opisuje úhel 10π. *Jarda bojuje se slimáky na záhonku.*

Zavedeme kartézské souřadnice v rovině spirály. Osa x nechť má směr úhlu $\varphi = 0$ a kladný směr osy y nechť leží ve směru $\varphi = 90^\circ$. Jednotlivé body spirály jsou pak popsány souřadnicemi

$$x = a\varphi\cos\varphi\,,$$
$$y = a\varphi\sin\varphi\,.$$

V závislosti na úhlu φ vyjádříme délku elementu oblouku spirály $\mathrm{d}l$ jako

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2} = a\sqrt{(\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)^2+(\sin\varphi+\varphi\cos\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi = a\sqrt{1+\varphi^2}\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

kde jsme veličiny $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$ zapsali jako diferenciály předchozích rovnic. Nyní dokážeme spočítat délku spirály prostřednictvím vztahu

$$L = a\int_0^{10\pi}\sqrt{1+\varphi^2}\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Počítejme prvně x-ovou polohu těžiště pomocí definice jako

$$x_T = \frac{\int_0^L x\lambda\,\mathrm{d}l}{\int_0^L \lambda\,\mathrm{d}l} = a\frac{\int_0^{10\pi}\varphi\cos\varphi\sqrt{1+\varphi^2}\,\mathrm{d}\varphi}{\int_0^{10\pi}\sqrt{1+\varphi^2}\,\mathrm{d}\varphi}\,.$$

Oba integrály vypočítejme numericky, např. s využitím WolframAlpha (byť integrál ve jmenovateli má analytické řešení). Takto získáme první souřadnici těžiště

$$x_T \doteq \frac{6{,}264\,18\,\mathrm{m}}{495{,}80} \doteq 0{,}012\,634\,\mathrm{m}\,.$$

Analogicky vypočítáme y-ovou polohu těžiště jako

$$y_T = a\frac{\int_0^{10\pi}\varphi\sin\varphi\sqrt{1+\varphi^2}\,\mathrm{d}\varphi}{\int_0^{10\pi}\sqrt{1+\varphi^2}\,\mathrm{d}\varphi} \doteq \frac{-98{,}708\,5\,\mathrm{m}}{495{,}80} \doteq -0{,}199\,09\,\mathrm{m}\,.$$

Těžiště tohoto úseku spirály se tak nachází ve vzdálenosti

$$d = \sqrt{x_T^2 + y_T^2} = 0{,}199\,\mathrm{m}$$

od počátku souřadnic. Vzhledem k tomu, že některé body spirály jsou od počátku vzdáleny až 3 m, vychází poloha těžiště docela blízko středu; spirála je tak poměrně souměrný objekt.

Protože spirála opisuje úhel 10π a většina její hmoty leží ve vyšších hodnotách φ, můžeme aproximovat $\sqrt{1+\varphi^2} \doteq \varphi$. Kupříkladu integrály ve výpočtu x-ové polohy těžiště se nám tím zjednoduší na

$$x_T = a\frac{\int_0^{10\pi} \varphi^2 \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi}{\int_0^{10\pi} \varphi \,\mathrm{d}\varphi} \doteq \frac{6{,}283\,\mathrm{m}}{493{,}5} \doteq 0{,}012\,7\,\mathrm{m}\,.$$

Druhá souřadnice těžiště pak vychází jako $-0{,}199\,9\,\mathrm{m}$; to dává vzdálenost těžiště od středu spirály 0,200 m. Vidíme tedy, že výsledek aproximace je velmi podobný přesnému řešení. Výhodou ale je, že použité integrály již mají analytické řešení a nemusíme je počítat numericky.

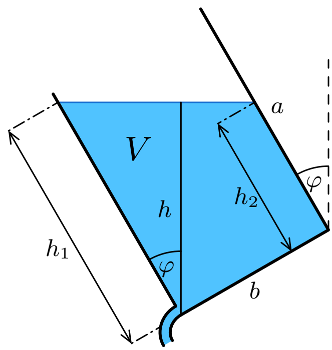
Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 37 ... žízeň je veliká — 6 bodů

Jarda při svém putování pouští narazil na kanystr s vodou. Kanystr má tvar kvádru o šířce $c = 20\,\mathrm{cm}$, délce $b = 40\,\mathrm{cm}$ a výšce $a = 60\,\mathrm{cm}$. Kanystru chybí víko a uprostřed spodní hrany o délce c se nachází kohoutek, kterým vytéká voda. Nádoba je naplněna z 90 procent. Jarda má opravdu velkou žízeň a tak chce, aby voda z kohoutku vytékala co největší rychlostí. O jaký úhel od kolmice k zemi tak musí kanystr kolem hrany c naklopit? Jarda prvně nádobu naklopí a až poté otevře kohoutek. *Jarda pracoval na jihomoravských stepích.*

Rychlost vytékání vody je úměrná odmocnině z výšky vodního sloupce nad otvorem, je tedy potřeba naklonit nádobu tak, aby byla hladina nad spodní hranou co nejvýše.

Najdeme závislost výšky hladiny na úhlu naklopení φ. Označme h výšku hladiny nad kohoutkem, h_1 vzdálenost hladiny po straně nad kohoutkem a h_2 vzdálenost hladiny od spodního rohu. Je zřejmé, že nádobu musíme naklánět směrem nad kohoutek, takže $h_1 \geq h_2$.



Obr. 7: Obrázek kanystru s vodou.

Předpokládejme, že se žádná voda z kanystru nevylila. Pak je její objem konstantní při naklopení a rovný $V = 0{,}9abc$. Při pohledu z boku je to plocha ohraničená hladinou a stěnami nádoby S a vynásobená délkou hrany c. Tato plocha je zřejmě $S = b\frac{h_1+h_2}{2}$. Dále vidíme, že $h_1 \cos\varphi = h$ a $b \operatorname{tg}\varphi = h_1 - h_2$. Najdeme tedy

$$h_1 = \frac{V}{bc} + \frac{b \operatorname{tg}\varphi}{2}$$

a

$$h = h_1 \cos\varphi = \frac{V\cos\varphi}{bc} + \frac{b\sin\varphi}{2}\,.$$

Při dosazení za objem v

$$h = 0{,}9a\cos\varphi + \frac{b\sin\varphi}{2}\,.$$

Derivací můžeme najít polohu maxima této funkce jako $\varphi_{\mathrm{max}} = 20{,}3^\circ$. Kanystr ovšem nemá víko a voda z něj vrchní stranou začne vytékat dříve, než se podaří nádobu naklonit na tento úhel. Jakmile nějaká voda vyteče vrchem, nebude již výška vody nad kohoutkem nikdy maximální. Protože předchozí rovnice je od $\varphi = 0$ do φ_{max} rostoucí, bude hladina nad kohoutkem nejvýše právě tehdy, když se bude hladina dotýkat horního okraje nádoby. To nastává tehdy, když $h_1 = a$, odtud

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2a - \frac{2V}{bc}}{b} = 2a\frac{0{,}1}{b}\,,$$

odkud $\varphi = 16{,}7^\circ$.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 38 ... otočný kondenzátor 6 bodů

Kondenzátor tvoří dvě otočné půlkruhové desky o poloměru $R = 2\,\mathrm{cm}$ ve vzájemné vzdálenosti $d = 0{,}1\,\mathrm{cm}$, mezi kterými je vzduch. V počátečním stavu jsou obě desky přesně nad sebou a kondenzátor je nabit na napětí $U_0 = 20\,\mathrm{V}$, poté je zdroj odpojen. Při otáčení jedné desky od druhé kolem osy procházející středem rovné strany desek působíme momentem sil. Jakou má počáteční velikost? *Jardovi nešel povolit šroub.*

Na deskách zůstane náboj Q. Ten je podle zadání (permitivita vzduchu je přibližně stejná jako pro vakuum)

$$Q = CU_0 = \frac{\varepsilon S U_0}{d} = \frac{\varepsilon \pi R^2 U_0}{2d}.$$

Při otáčení desek vůči sobě se mění kapacita kondenzátoru, mění se tak i jeho energie $\frac{Q^2}{2C}$. Na počátku je plocha kondenzátoru $\frac{\pi R^2}{2}$, při otočení o úhel φ bude plocha kondenzátoru $\frac{(\pi-\varphi)R^2}{2}$. Dosadíme vzorec pro kapacitu $\frac{S\varepsilon}{d}$ do výrazu pro energii a derivujeme podle úhlu, čímž dostaneme moment sil (tzv. princip virtuální práce)

$$M = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\partial E}{\partial C}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\varphi} = \left(-\frac{Q^2}{2C^2}\right)\left(-\frac{\varepsilon R^2}{2d}\right)\,.$$

Velikost momentu sil v počáteční poloze $\varphi = 0$, kdy $C = \frac{\varepsilon\pi R^2}{2d}$, vychází

$$M = \frac{\varepsilon R^2 U_0^2}{4d} = 3{,}5 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{N{\cdot}m}\,.$$

V počáteční poloze jsou všechny okrajové jevy zanedbatelné.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha 39 ... nezvratný pád 7 bodů

Představme si těleso o hmotnosti $M = 72\,\mathrm{kg}$, které pustíme z výšky $h = 12\,\mathrm{m}$ nad zemí. V tu chvíli na něj z bodu, kam by zanedlouho dopadlo, začneme střílet kulometem s kadencí $f = 2\,000\,\mathrm{min^{-1}}$ (přičemž první náboj byl vystřelen v čase $1/f$ od počátku pohybu). Náboje mají hmotnost $m = 11{,}3\,\mathrm{g}$, pohybují se rychlostí $v = 790\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a po srážce zůstanou spojené s tělesem. Za jak dlouho těleso dopadne?

Jáchym věděl, že to časem spadne, ale chtěl vědět, kdy přesně.

Označme rychlost tělesa těsně před i-tou srážkou v_i a těsně po i-té srážce v_i', kde obě rychlosti míří směrem dolů. Jelikož těleso padá v tíhovém poli, za čas $T = f^{-1}$ zrychlí o $v_{i+1} - v_i' = gT$. Hmotnost tělesa bude obdobně $M_i = M + (i-1)\,m$, $M_i' = M + im = M_{i+1}$. Dále si napišme rovnici dokonale nepružné srážky, při které se zachová pouze hybnost,

$$-mv + M_i v_i = (m + M_i)\, v_i' = M_{i+1} v_i'\,,$$

kde jsme zanedbali jakékoli změny v rychlosti nábojů způsobené tíhovou silou, protože by se (vzhledem k velmi vysoké rychlosti a krátké době letu) prakticky nestihly projevit. Ze stejného důvodu neuvažujeme ani to, že náboje do tělesa ve skutečnosti nenaráží s periodou T, ale trochu rychleji, protože se k nim těleso pohybuje. Úpravou předchozí rovnice dostáváme

$$\begin{aligned} v_i' &= \frac{-mv + M_i v_i}{M_{i+1}} = \frac{-mv + (M + (i-1)\,m)\, v_i}{M + im}\,,\\ v_{i+1} &= v_i' + gT = \frac{-mv + (M + (i-1)\,m)\, v_i + (M + im)\, gT}{M + im} =\\ &= \frac{-v + (k + i - 1)\, v_i + (k+i)\, gT}{k+i} \approx -\frac{v}{k+i} + v_i + gT\,, \end{aligned}$$

kde $k = \frac{M}{m}$. Aproximaci si můžeme dovolit, protože $k \gg 1$ čili $(k + i - 1)\,/\,(k+i) \approx 1$. Odtud zřejmě

$$v_i \approx igT - v \sum_{j=2}^{i} \frac{1}{k+j}\,.$$

Všimněme si, že sumu počítáme až od $j = 2$, protože musí platit $v_1 = gT$ – první srážku uvažujeme až v čase T, takže do té doby ještě těleso padá „normálně“.[4] Dále se nám bude lépe

[4] Zanedbáváme dobu letu, takže předpokládáme, že kulka do tělesa narazí přesně v okamžiku, kdy byla vystřelena. Perioda $T \doteq 30\,\mathrm{ms}$ je řádově stejně velká, jako by byla počáteční doba letu (přibližně $15\,\mathrm{ms}$), takže by se mohlo zdát, že tato aproximace není opodstatněná. Nicméně chyba výsledku úlohy, která tímto vznikne, skutečně bude zanedbatelná.

počítat s rychlostí na začátku posrážkového intervalu, takže si ji vyjádříme dosazením za v_{i+1} do původní rovnice

$$v_i' = v_{i+1} - gT \approx (i+1)\,gT - v\sum_{j=2}^{i+1}\left(\frac{1}{k+j}\right) - gT = igT - v\sum_{j=1}^{i}\left(\frac{1}{k+j+1}\right) .$$

Celková dráha, uražená do okamžiku před n-tou srážkou, potom bude

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{i=0}^{n-1}\left(v_i'T + \frac{1}{2}gT^2\right) = gT^2\sum_{i=0}^{n-1} i - vT\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{k+j+1} + \frac{n}{2}gT^2 = \\ &= \frac{n^2}{2}gT^2 - vT\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{k+j+1} = \frac{n^2}{2}gT^2 - vT\sigma(n) . \end{aligned} \tag{1}$$

Chceme zjistit, po kolika krocích vyjde $x_n > h$. K tomu můžeme použít například tabulkový procesor typu MS Excel nebo nějaký skript. Druhou možností je aproximovat poslední sumu jako

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{i}\left(1+\frac{j}{k}+\frac{1}{k}\right)^{-1} \approx \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{i}\left(1-\frac{j}{k}-\frac{1}{k}\right) = \\ &= \frac{1}{k^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{i}\left((k-1)-j\right) \quad = \frac{1}{k^2}\sum_{i=0}^{n-1}\left((k-1)\,i - \frac{i\,(i+1)}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2k^2}\sum_{i=0}^{n-1}\left((2k-3)\,i - i^2\right) \quad = \frac{1}{2k^2}\left((2k-3)\,\frac{n\,(n-1)}{2} - \frac{n\,(n-1)\,(2n-1)}{6}\right) = \\ &= \frac{n\,(n-1)\,(3k-4-n)}{6k^2} , \end{aligned}$$

což můžeme udělat, pokud $k \gg n$. To je pro zadané hodnoty splněno více než dostatečně, takže námi nalezená funkce aproximuje sumu téměř přesně. Zároveň je to jistým způsobem zajímavější výsledek než předtím odvozené x_n, které popisuje dráhu tělesa pouze v diskrétních časových bodech $t_n = nT$. Místo toho teď můžeme přejít ke spojitému času t a dodefinovat n mimo celočíselné hodnoty jako $n(t) = t/T$. Dosazením do vztahu (1) a aproximací sumy podle rovnice výše dostáváme

$$X(t) = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{vt}{6k^2}\left(\frac{t}{T}-1\right)\left(3k-4-\frac{t}{T}\right) .$$

O této funkci jsme už ukázali, že pro celočíselná n platí $X(nT) \approx x_n$. Nyní však půjdeme ještě dál a bez přímého důkazu řekneme, že $X(t)$ aproximuje skutečnou dráhu tělesa $x(t)$ nejen v „celočíselných“ časech $t = nT$, ale pro každé reálné t.[5]

Fyzikální intuice je taková, že hodnoty x_n „prokládáme“ polynomiální závislostí (stupně 3). No a jak víme, shodují-li se dva polynomy nejvýše N-tého stupně v alespoň $N+1$ bodech, nutně se shodují ve všech. V tomto případě se sice funkce x a X v bodech x_n rovnají jen přibližně (a x zřejmě nemůže být polynomem, neboť má nespojitou první derivaci), ale v rámci přesnosti úlohy je to dostatečně přesná aproximace.

[5] Samozřejmě jen pro dostatečně malé hodnoty – po vystřílení dostatečného množství nábojů by přestal platit základní předpoklad aproximace $k \gg n$. Naštěstí, těleso v té době už dávno spadne na zem.

Teď už nezbývá než položit $X(t) = h$ a najít čas dopadu t. Situaci nám trochu komplikuje fakt, že se jedná o obecnou kubickou rovnici tvaru

$$0 = vt^3 + 3\left(gk^2T^2 - vT\,(k-1)\right)t^2 + vT^2\,(3k-4)\,t - 6hk^2T^2\,.$$

Numericky nicméně snadno zjistíme, že jediným kladným řešením je $t = 2{,}04\,\mathrm{s}$.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha 40 ... život je krátký 7 bodů

Matěj našel kus čistého radia 225. Po chvíli ale zjistil, že se mu rozpadá β^- rozpadem na aktinium s poločasem rozpadu 15 dní. Tím to ale nekončí, aktinium totiž podléhá α rozpadu na francium s poločasem rozpadu 10 dní. Za kolik dní od nálezu radia bude mít Matěj nejvíce aktinia? *Matěj ukradl z přednášky o počítačových metodách.*

Množství radia, respektiva aktinia, které Matěj vlastní v čase t, označme $R(t)$, resp. $A(t)$, a jednotlivé rozpadové konstanty označme postupně λ_R a λ_A. Situaci můžeme shrnout takto

$$R(t) \xrightarrow{\lambda_R} A(t) \xrightarrow{\lambda_A} F(t)\,.$$

Pro $R(t)$ a $A(t)$ můžeme sestavit následující diferenciální rovnice

$$\begin{aligned}\dot{R} &= -\lambda_R R(t)\ ,\\ \dot{A} &= -\lambda_A A(t) + \lambda_R R(t)\ .\end{aligned} \tag{2}$$

První rovnici zjevně řeší

$$R(t) = R_0 \mathrm{e}^{-\lambda_R t}\,,$$

kde R_0 je počáteční množství Matějova radia. Toto řešení dosadíme do (2)

$$\dot{A} = -\lambda_A A(t) + R_0 \lambda_R \mathrm{e}^{-\lambda_R t}\,.$$

Řešení této nehomogenní diferenciální rovnice je trochu složitější. Za použití počáteční podmínky $A(0) = 0$ dojdeme k závislosti

$$A(t) = \frac{\lambda_R R_0}{\lambda_R - \lambda_A}\left(\mathrm{e}^{-\lambda_A t} - \mathrm{e}^{-\lambda_R t}\right)\ .$$

Množství aktinia bude maximální právě v případě, když závorka nabyde extremální hodnoty. Z rovnice $\dot{A}(t_{\max}) = 0$ tak dostaneme

$$\lambda_A \mathrm{e}^{-\lambda_A t_{\max}} - \lambda_R \mathrm{e}^{-\lambda_R t_{\max}} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{\max} = \frac{t_R t_A}{t_A - t_R}\,\frac{\ln\left(\frac{t_A}{t_R}\right)}{\ln(2)} \doteq 17{,}5\,\text{dní}\,,$$

kde $t_{R,A}$ značí poločasy rozpadu a využili jsme vztahu $\lambda_{R,A} = \frac{\ln(2)}{t_{R,A}}$.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha 41 ... zářivá

5 bodů

Dokonale černé těleso vyzařuje s největší intenzitou I_λ na vlnové délce $\lambda_{\max} = 598{,}34 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}$. Na jaké vlnové délce vyzařuje s poloviční intenzitou oproti maximální? Napište největší správnou hodnotu.

Danka si říkala, že tohle by nechtěla počítat.

Žiarenie dokonale čierneho telesa popisuje Planckov zákon. Ten môže byť vyjadrený v dvoch tvaroch

$$\mathrm{d}I_\nu = B_\nu\,\mathrm{d}\nu\,, \qquad \mathrm{d}I_\lambda = B_\lambda\,\mathrm{d}\lambda\,,$$

kde veličiny s indexom ν nie sú rovnaké ako veličiny s indexom λ a dajú sa medzi sebou prepočítať z podmienky rovnosti celkových intenzít

$$I = \int_0^\infty B_\nu\,\mathrm{d}\nu = \int_0^\infty B_\lambda\,\mathrm{d}\lambda\,.$$

Pre prepočet tak musíme využiť vzťah medzi vlnovou dĺžkou λ a frekvenciou ν

$$\nu\lambda = c \rightarrow \mathrm{d}\nu = -\frac{c}{\lambda^2}\,\mathrm{d}\lambda\,.$$

Známy tvar Planckovho zákona pre B_ν nám tak dáva

$$B_\lambda = B_\nu\left(\nu = \frac{c}{\lambda}\right)\cdot\frac{c}{\lambda^2} = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}\,. \tag{3}$$

Poloha maxima tejto funkcie sa dá určiť pomocou derivácie, ktorá však nemá pekné analytické riešenie (obsahuje Lambertovu W funkciu). Finálny výsledok sa nazýva Wienov posunovací zákon a má tvar

$$\lambda_{\max}T = b = 2{,}897771955 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m{\cdot}K}\,.$$

Zo zadanej hodnoty vlnovej dĺžky maxima dostávame teplotu čierneho telesa $T = 4843{,}0\,\mathrm{K}$. Ďalším krokom je určiť hodnotu intenzity vyžarovania v maxime, dosadením do (3) dostávame $B_\lambda^{\max} = 1{,}09122 \cdot 10^7\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}sr^{-1}{\cdot}\mu m^{-1}}$

Najťažšou časťou úlohy je určiť, kedy

$$B_\lambda(\lambda) = \frac{1}{2}B_\lambda^{\max} = 5{,}4561 \cdot 10^6\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}sr^{-1}{\cdot}\mu m^{-1}}\,.$$

Všetky potrebné veličiny poznáme, zostáva nám teda riešiť túto rovnicu numericky. Inou možnosťou je nakresliť si Planckovu funkciu pre danú teplotu a úlohu riešiť graficky. Pre výpočty spojené s Planckovým zákonom sú užitočné rôzne webové nástroje, napríklad `https://www.spectralcalc.com/blackbody_calculator/blackbody.php`, ktorý vykresľuje závislosť v danom intervale vlnových dĺžok. Zo zobrazenia celej funkcie vieme odhadnúť, že polovičná hodnota pre väčšie vlnové dĺžky sa nachádza niekde v intervale $1000 - 1200\,\mathrm{nm}$. Po vykreslení tohto intervalu môžeme interval zúžiť na $1080 - 1090\,\mathrm{nm}$ a následne $1087 - 1088\,\mathrm{nm}$. Finálnym zväčšením/prekreslením máme odhad $\lambda_{1/2} = 1087{,}2\,\mathrm{nm}$.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha 42 ... antireflexní brýle 7 bodů

Patrik má na brýlích tenkou antireflexní vrstvu o tloušťce $d = 250\,\mathrm{nm}$ a indexu lomu $n_2 = 1{,}4$. Která část viditelného světla podléhá destruktivní interferenci? Index lomu vzduchu je $n_1 = 1$, skla $n_3 = 1{,}55$ a paprsky dopadají kolmo k brýlím. *Patrik si prohlížel brýle proti Slunci.*

Jelikož pro jednolivé vrstvy platí $n_1 < n_2 < n_3$, světlo vždy po odrazu na hustší vrstvě změní fázi o $\frac{\lambda}{2}$, a protože se to stane dvakrát, změna se vykompenzuje. Dále musí nastat podmínka minima $\Delta l = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$, při průchodu reflexní vrstvou nastane rozdíl optické dráhy $\Delta l = 2n_2 d$. Tyto dvě dráhy se musí rovnat

$$2n_2 d = (2k+1)\frac{\lambda}{2},$$
$$\lambda = \frac{4n_2 d}{2k+1}.$$

My hledáme násobek k, pro které se vyruší část viditelného spektra, tedy $(400\,\mathrm{nm}, 700\,\mathrm{nm})$,

$$\lambda(k=0) = \frac{4n_2 d}{1} = \frac{4 \cdot 1{,}4 \cdot 250}{1}\,\mathrm{nm} = 1\,400\,\mathrm{nm},$$
$$\lambda(k=1) = \frac{4n_2 d}{3} = \frac{4 \cdot 1{,}4 \cdot 250}{3}\,\mathrm{nm} = 467\,\mathrm{nm},$$
$$\lambda(k=2) = \frac{4n_2 d}{5} = \frac{4 \cdot 1{,}4 \cdot 250}{5}\,\mathrm{nm} = 280\,\mathrm{nm}.$$

Destruktivní interferenci podléhá světlo o vlnové délce $467\,\mathrm{nm}$, což odpovídá modré části spektra.

Patrik Kašpárek
`patrik.kasparek@fykos.cz`

Úloha 43 ... Dano letí za exoplanetou 7 bodů

Dano by chtěl kvůli výzkumu exoplanet letět kosmickou lodí k Proximě Centauri vzdálené 4,2 světelných let. Vypočtěte Lorentzův faktor pohybu, pokud Dano chce, aby na cestě tam a zpět zestárl o půl roku. Zrychlování lodi neuvažujte.
Vašek zažárlil na Danův výzkum exoplanet.

Dano díky dilataci času zestárne celkově o

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

kde Δt je čas uběhlý na Zemi a γ je Lorentzův faktor. Podle hodnot ze zadání je jasné, že bude muset cestovat téměř rychlostí světla c, a proto můžeme odhadnout

$$\Delta t \approx \frac{2l}{c}\,,$$

kde $2l = 8{,}4\,\mathrm{ly}$. Kombinací dvou rovnic výše jednoduše dostaneme

$$\gamma \approx \frac{2l}{c\Delta\tau} \doteq 16{,}8\,.$$

V přesnějším výpočtu uvažujeme, že Dano se vzhledem ke Sluneční soustavě pohybuje rychlostí o velikosti v. Pro pozorovatele na Zemi tak bude Danova cesta trvat čas

$$\Delta t = \frac{2l}{v}\,.$$

Opět dohromady s první rovnicí vyloučíme čas Δt,

$$\frac{\Delta \tau}{2l} = \frac{1}{\gamma v} = \frac{1}{v}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Odtud už jen jednoduchými algebraickými úpravami vyjádříme faktor γ jako

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2l}{c\Delta\tau}\right)^2} \doteq 16{,}8\,.$$

V rámci přesnosti zadání úlohy jsme dostali stejný výsledek jako dříve.

Václav Mikeska
v.mikeska@fykos.cz

Úloha 44 ... nástupiště 9 a 3/4 6 bodů

Stojíme na nástupišti 2 m *od kolejí a vedle nás pomalu brzdí velmi dlouhý vlak, přičemž naše místo se nachází přibližně uprostřed soupravy. Slyšíme velmi nepříjemný zvuk brzd o hlasitosti* 110 dB, *který vychází z celé délky vlaku. Možná nám pomůže přesunout se od kolejí dále. Kolik decibelů naměříme na druhé straně nástupiště, která je* 7 m *od vlaku?*

Jarda věří na Harryho Pottera a miluje Hermionu.

Pro výpočet potřebujeme vědět, jak se mění intenzita zvuku I v závislosti na vzdálenosti. Intenzita zvuku je akustický výkon procházející plochou. Protože zvuk vychází z celého, velmi dlouhého vlaku, můžeme jako tuto plochu uvažovat válcový plášť s osou totožnou s vlakem. Plocha tohoto pláště roste se vzdáleností od vlaku lineárně, intenzita je tak nepřímo úměrná vzdálenosti. To je důležité si uvědomit, intenzita závisí na vzdálenosti jako $I \propto 1/r$ (na rozdíl od bodového zdroje, kdy $I \propto 1/r^2$).

Hlasitost zvuku L (v decibelech) počítáme jako

$$L = 10 \log \frac{I}{I_\mathrm{p}}\,,$$

kde I_p je intenzita prahu slyšení.

Zkusme nyní od sebe odečíst hlasitosti zvuku ve vzdálenostech $r_1 = 2\,\mathrm{m}$ a $r_2 = 7\,\mathrm{m}$ od vlaku

$$L_1 - L_2 = 10\left(\log\frac{I_0}{r_1 I_\mathrm{p}} - \log\frac{I_0}{r_2 I_\mathrm{p}}\right) = 10 \log\frac{r_2}{r_1}\,.$$

Po tomto kroku již jednoduše vyjádříme hlasitost ve vzdálenosti r_2 jako

$$L_2 = L_1 - 10\log\frac{r_2}{r_1} = 104{,}6\,\mathrm{dB}\,.$$

Intenzita se snížila několikrát, náš vjem se ale tolik nezměnil.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha 45 ... jízda po exponenciále 8 bodů

Exponenciála je ve fyzice velmi důležitou funkcí, proto si Jarda ve svém novém zábavním parku postavil dráhu právě ve tvaru této funkce. Nastupuje se ve výšce $h = 10\,\mathrm{m}$ a jede se dolů po dráze, která má při pohledu z boku tvar funkce $y = h\mathrm{e}^{-\frac{x}{h}}$, kde x je vzdálenost od paty nástupní věže. V jaké výšce nad zemí budou sjíždějící návštěvníci působit na atrakci největší silou?

Jardu nebaví jezdit výtahem dolů.

Při průjezdu působí návštěvníci na atrakci dvěma silami – tíhovou a dostředivou. Dostředivá působí kolmo k dráze, tíhovou ale musíme rozložit na složku tečnou a normálovou. Výsledná síla pak bude součtem tíhové normálové síly a dostředivé síly. Velikost dostředivé síly najdeme ze znalosti rychlosti a poloměru křivosti. Rychlost v určíme ze zákona zachování energie jako

$$v = \sqrt{2g\left(h - y(x)\right)} = \sqrt{2gh(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{h}})}\,,$$

kde g je tíhové zrychlení a $y(x)$ je výška nad zemí v závislosti na vodorovné souřadnici. Poloměr křivosti r najdeme pomocí vzorce

$$r = \frac{(1 + {y'}^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}\,,$$

kde y', resp. y'' značí první, resp. druhou derivaci funkce y podle x. Exponenciála se naštěstí derivuje docela pohodlně, proto už rovnou napíšeme vztah pro dostředivou sílu v závislosti na x

$$F_\mathrm{d} = \frac{mv^2}{r} = mg\frac{2\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{h}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{h}}}{\left(1 + \left(-\mathrm{e}^{-\frac{x}{h}}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Nyní najdeme normálovou složku tíhové síly jako

$$F_{g_\mathrm{n}} = mg\cos\alpha = mg\frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}\,\alpha^2}}\,,$$

kde α je úhel, který svírá sklon dráhy se zemí. V daném bodě je funkce $\mathrm{tg}\,\alpha$ číselně rovna derivaci y podle x, proto můžeme psát

$$F_{g_\mathrm{n}} = mg\frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{e}^{-\frac{2x}{h}}}}\,.$$

Dostředivá i tíhová síla obě působí do podložky, proto je sečteme a najdeme tak výslednou sílu, kterou vozítko s návštěvníky působí na dráhu

$$F = mg\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{e}^{-\frac{2x}{h}}}} + \frac{2\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{h}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{h}}}{\left(1 + \mathrm{e}^{-\frac{2x}{h}}\right)^{\frac{3}{2}}}\right) = mg\frac{1 + 2\mathrm{e}^{-\frac{x}{h}} - \mathrm{e}^{-\frac{2x}{h}}}{\left(1 + \mathrm{e}^{-\frac{2x}{h}}\right)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Abychom našli nejvyšší hodnotu této funkce, budeme derivovat podle x

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{e}^{-\frac{3x}{h}} - 4\mathrm{e}^{-\frac{2x}{h}} - 5\mathrm{e}^{-\frac{x}{h}} + 2}{\left(1 + \mathrm{e}^{-\frac{2x}{h}}\right)^2}$$

a tuto derivaci položíme rovnu nule pro nalezení extrému. Rovnici

$$\mathrm{e}^{-\frac{3x}{h}} - 4\mathrm{e}^{-\frac{2x}{h}} - 5\mathrm{e}^{-\frac{x}{h}} + 2 = 0$$

řešíme numericky, přičemž má jediné kladné numerické řešení, a to 11,30 m. V tomto místě je dráha 3,23 m nad zemí. Právě v tomto bodě je dráha nejvíce zatěžovaná.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha 46 ... jízda na kolotoči

7 bodů

Kromě horské dráhy si Jarda do svého nového zábavního parku pořídil i řetízkový kolotoč. Vodorovný disk o průměru $d = 8\,\mathrm{m}$ se otáčí s periodou $T = 8\,\mathrm{s}$ a sedačky jsou zavěšeny na konci disku na lanech o délce $l = 8\,\mathrm{m}$. Určete, jakou silou působí dítě o hmotnosti $m = 25\,\mathrm{kg}$ na sedačku v ustáleném stavu. *Jarda je pořád v jednom kole.*

V rotující soustavě působí na dítě tři síly - tahová síla lana, tíhová a odstředivá síla. V ustáleném stavu jsou výslednice sil i jejich momentů nulové. Označme α úhel, který svírá lano od kolmice k zemi. Pak vzdálenost sedačky od osy otáčení je $x = \frac{d}{2} + l\sin\alpha$ a odstředivá síla má velikost

$$F_\mathrm{o} = m\omega^2 x = m\frac{4\pi^2}{T^2}\left(\frac{d}{2} + l\sin\alpha\right) .$$

Výsledná síla, kterou dítě působí na sedačku, je součtem tíhové a odstředivé síly. Potom je její velikost

$$F = \sqrt{F_g^2 + F_\mathrm{o}^2} .$$

Z rovnosti momentů těchto dvou sil platí

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{F_\mathrm{o}}{F_g} .$$

Nyní z posledních dvou rovnic dosadíme do první a získáme

$$F_\mathrm{o} = \frac{4\pi^2}{T^2} m\left(\frac{d}{2} + l\frac{F_\mathrm{o}}{F}\right) ,$$

$$F_\mathrm{o}\left(1 - \frac{4\pi^2 ml}{FT^2}\right) = \frac{4\pi^2}{2T^2} md ,$$

$$\left(F^2 - m^2 g^2\right)\left(F - \frac{4\pi^2 ml}{T^2}\right)^2 = \frac{4\pi^4 m^2 d^2}{T^4} F^2 .$$

Toto je rovnice čtvrtého řádu pro proměnnou F, musíme ji proto řešit numericky. Jediným jejím kladným kořenem je hledaná hodnota $F = 270\,\mathrm{N}$.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha 47 ... katapult

7 bodů

Na tyčku o délce $l = 30\,\mathrm{cm}$, která leží na vodorovné podložce a může se otáčet pouze ve svislé rovině kolem jednoho z konců, navlékneme malý korálek. Tyčkou začneme otáčet konstantní úhlovou rychlostí směrem vzhůru. Jak nejdále od středu otáčení můžeme umístit korálek, aby opustil tyčku právě ve chvíli, kdy bude ve vertikální poloze? Korálek se po tyčce pohybuje bez tření.

Jarda chtěl na teoretické mechanice trefit přednášejícího.

Úlohu řešme v soustavě spojené s otáčející se tyčí. V takové soustavě budou na korálek působit síly tíhová, odstředivá, Coriolisova a reakce tyčky. Protože se ovšem korálek vzhledem k tyčce může pohybovat pouze radiálně, setrvačná Coriolisova síla žádný vliv na pohyb mít nebude, protože se vyruší se složkou reakce tyčky. Polohu korálku charakterizujme souřadnicí x, která udává jeho vzdálenost od středu otáčení. Odstředivá síla má velikost

$$F_{\mathrm{ods}} = m\omega^2 x\,,$$

kde m je hmotnost korálku a ω je úhlová rychlost otáčení tyče. Tato síla působí směrem od středu otáčení. Další důležitou silou je tíhová. Rozdělme ji do dvou složek, jednu ve směru tyčky a druhou kolmo na ni. Složky ve směru tyčky vypočítáme jako

$$F_{\mathrm{gt}} = mg\sin\varphi = mg\sin\omega t\,,$$

kde g je tíhové zrychlení a $\varphi = \omega t$ je úhel naklonění tyče vůči vodorovné rovině. Protože se s časem úhel náklonu zvětšuje, působí tato složka tíhové síly směrem ke středu otáčení. Podobně jako u Coriolisovy síly se i normálová složka tíhové síly vykompenzuje s reakcí tyčky, protože se korálek v naší vztažné soustavě pohybuje pouze radiálně. Pohybová rovnice korálku na tyčce je tak

$$ma = m\omega^2 x - mg\sin\omega t\,.$$

Toto je diferenciální rovnice druhého řádu. Její řešení však můžeme zkusit uhodnout. Funkci x si rozdělíme na dvě části, x_1 a x_2. Hledáme nějakou funkci x_1, kterou když dvakrát zderivujeme, dostaneme tu stejnou funkci přenásobenou faktorem ω^2. Funkcí splňující část podmínky je součet dvou exponenciál, tedy

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 Ae^{Bt} + Ce^{Dt}}{\mathrm{d}t^2} = B^2 Ae^{Bt} + D^2 Ce^{Dt}\,.$$

Nyní uplatníme podmínku $\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} = \omega^2 x$ a získáme vztah

$$B^2 Ae^{Bt} + D^2 Ce^{Dt} = \omega^2 \left(Ae^{Bt} + Ce^{Dt}\right)\,.$$

Aby se obě strany mohly rovnat, musí být konstanty B a D rovny $B = \omega$ a $D = -\omega$ (nebo naopak, kdyby byly obě stejné, pak by to byla jen jedna exponenciála, a jiná čísla to být kvůli faktoru ω^2 nemůžou). Koeficienty A a C odvodíme z počátečních podmínek.

Podobným způsobem najdeme i druhou část funkce x, tedy x_2. To je část, jejíž druhá derivace je rovna této funkci přenásobené faktorem ω^2 mínus funkce sinus. Zkusme tedy položit $x_2 = E\sin\omega t$. Pak

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 E\sin\omega t}{\mathrm{d}t^2} = -E\omega^2\sin\omega t\,.$$

Víme, že

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} = -E\omega^2\sin\omega t = \omega^2 x_2 - g\sin\omega t = \omega^2 E\sin\omega t - g\sin\omega t\,.$$

Aby tato rovnice mohla platit, je potřeba, aby platilo

$$E = \frac{g}{2\omega^2}\,.$$

Pak tedy

$$x = Ae^{\omega t} + Ce^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\sin \omega t\,.$$

První z počátečních podmínek je nulová rychlost v čase $t = 0$. Derivací funkce x najdeme rychlost korálku v a po dosazení $t = 0$ dostáváme rovnici

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A\omega e^{\omega t} - C\omega e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega}\cos \omega t = 0\,,$$

odkud získáme

$$A - C = -\frac{g}{2\omega^2}\,.$$

Podle zadání má při úhlu $\varphi = \omega t = \frac{\pi}{2}$ vyletět korálek z tyčky, musí tedy platit

$$l = Ae^{\frac{\pi}{2}} + Ce^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{g}{2\omega^2}\,,$$

z čehož pomocí první podmínky odvodíme

$$A = \frac{l - \frac{g}{2\omega^2}\left(1 + e^{-\frac{\pi}{2}}\right)}{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}} = \frac{l - \frac{g}{2\omega^2}\left(1 + e^{-\frac{\pi}{2}}\right)}{2\cosh\frac{\pi}{2}}\,.$$

Pak

$$C = A + \frac{g}{2\omega^2} = \frac{l - \frac{g}{2\omega^2}\left(1 - e^{\frac{\pi}{2}}\right)}{2\cosh\frac{\pi}{2}}\,.$$

V čase $t = 0$ je poloha korálku

$$x_0 = A + C = \frac{l - \frac{g}{2\omega^2} - \frac{g}{4\omega^2}\left(e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}}\,.$$

Počáteční poloha bude tím vyšší, čím větší bude úhlová rychlost. Při $\omega \to \infty$ bude hodnota počáteční vzdálenosti

$$x_0 = \frac{l}{\cosh\frac{\pi}{2}} = 12{,}0\,\mathrm{cm}\,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 48 ... moc krychlí 5 bodů

Mějme nekonečnou krychlovou síť složenou ze stejných odporů $R = 24\,\Omega$, které se nacházejí na hraně každé jedné krychle. Jaký odpor této sítě bychom naměřili mezi dvěma sousedními vrcholy? *Jarda chtěl těžkou úlohu s krátkým řešením.*

Nechť do vrcholu A přivedeme proud I. Vzhledem k symetrii sítě poteče do každého z šesti okolních vrcholů proud $\frac{I}{6}$. Z vedlejšího vrcholu B musí stejný proud I odtékat a znovu díky symetrii jsou všechny proudy přitékající do B rovny $\frac{I}{6}$. Z principu superpozice dostáváme, že mezi body A a B teče proud

$$\frac{I}{6} + \frac{I}{6} = \frac{I}{3}\,,$$

takže napětí na rezistoru mezi body A a B je $U = R\frac{I}{3}$. Toto napětí je ale rovné součinu proudu I a celkovému odporu R_c krychlové sítě mezi body A a B, tedy $U = R_\mathrm{c} I$. Odtud

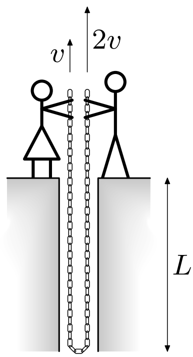
$$R_\mathrm{c} = \frac{U}{I} = \frac{R\frac{I}{3}}{I} = \frac{R}{3} = 8\,\Omega\,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 49 ... pracujeme vytahováním — 8 bodů

Alice s Bobem vytahují z jámy nepružný řetěz o délkové hustotě $\lambda = 0{,}4\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-1}}$. Alice vytahuje řetěz konstantní rychlostí $v = 0{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, Bob dvojnásobnou rychlostí. Kolikrát větší práci vykoná Bob od doby, kdy je nejnižší bod řetězu v hloubce $L = 5\,\mathrm{m}$, až do úplného vytažení?

Matěje fascinuje Mould efekt.



Na první pohled se zdá, že by Bob měl vykonat dvojnásobnou práci, protože oba táhnou stejnou silou, ale Bob po dvakrát delší dráze. Ve skutečnosti ale musí Bob táhnout větší silou, protože část řetězu zároveň urychluje z rychlosti $v_\mathrm{A} = v$, kterou táhne Alice, na rychlost $v_\mathrm{B} = 2v_\mathrm{A}$. Předpokládejme, že Alice a Bob jsou dost blízko u sebe (vzhledem k délce řetězu), čili dolní část řetězu, která tvoří ohyb, je zanedbatelně malá.

Označme hloubku nejnižšího bodu řetězu jako l, přičemž na počátku platí $l = L$ a na konci $l = 0$. Alice na řetěz působí pouze silou, jež je stejně velká jako tíhová síla působící na Alicinu polovinu řetězu,

$$F_\mathrm{A} = F_g = \lambda l g\,.$$

Pro výpočet Bobovy síly musíme využít Newtonův pohybový zákon v obecném tvaru. Výslednice všech sil, které na jeho část řetězu působí, musí být roven časové derivaci hybnosti

$$F_\mathrm{B} - F_g = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(mv\right)}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} + m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,.$$

Bobova část řetězu jako celek nezrychluje, takže poslední člen je nulový. První člen nám říká, jak velká síla je potřeba k tomu, abychom za čas $\mathrm{d}t$ urychlili hmotnost $\mathrm{d}m$ o rychlost Δv. V tomto případě platí $\Delta v = v_\mathrm{B} - v_\mathrm{A}$.

Za čas $\mathrm{d}t$ bude dohromady vytaženo $\mathrm{d}x = (v_\mathrm{A} + v_\mathrm{B})\,\mathrm{d}t$ řetězu. Těsně předtím se polovina této vzdálenosti nacházela na Alicině straně a polovina na Bobově. Nicméně Bob vytáhl řetěz o délce $v_\mathrm{B}\,\mathrm{d}t$ čili na jeho stranu se musel „přelít“ úsek s délkou

$$\mathrm{d}l_\mathrm{B} = v_\mathrm{B}\,\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{d}x}{2} = \frac{v_\mathrm{B} - v_\mathrm{A}}{2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Hmotnost tohoto úseku je jednoduše $\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}l_\mathrm{B}$, dosazením získáme celkovou Bobovu sílu

$$F_\mathrm{B} = F_g + v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = F_g + \frac{\lambda}{2}\left(v_\mathrm{B} - v_\mathrm{A}\right)^2 \ .$$

Proč touto dodatečnou silou působí pouze Bob a nerozdělí se stejně jako tíhová síla mezi oba tahače? Protože pouze Bob způsobuje urychlování řetězu. Aliciny silové účinky jsou ekvivalentní tomu, že by tahala svojí část o délce l, z jejíhož konce by samovolně odpadávala poslední oka řetězu. Tím by se sice zkracoval, ale k žádné dodatečné síle by to nevedlo. Ve skutečnosti si tato oka k sobě přetáhne Bob, k jejich urychlení však potřebuje nějakou sílu navíc.

Polohu nejnižšího bodu lana v čase t určíme jednoduše jako

$$l = L - \frac{v_\mathrm{A} + v_\mathrm{B}}{2}t\,,$$

Přičemž celkový čas vytahování bude zřejmě $T = \frac{2L}{v_\mathrm{A}+v_\mathrm{B}}$. Nyní už jen zbývá určit práci. Pro Alici dostáváme

$$W_\mathrm{A} = \int_0^T F_\mathrm{A} v_\mathrm{A}\,\mathrm{d}t = \lambda g v_\mathrm{A}\int_0^T \left(L - \frac{v_\mathrm{A}+v_\mathrm{B}}{2}t\right)\mathrm{d}t = \lambda g v_\mathrm{A}\left[Lt - \frac{v_\mathrm{A}+v_\mathrm{B}}{4}t^2\right]_0^T = \\ = \frac{\lambda g v_\mathrm{A} L^2}{v_\mathrm{A}+v_\mathrm{B}} = \frac{\lambda g L^2}{3}\,.$$

U Boba postupujeme obdobně. Příspěvek tíhové síly bude úplně stejný, akorát dvakrát větší kvůli dvojnásobné rychlosti. Zaměřme se proto spíše na druhou sílu

$$W_\mathrm{B} = \int_0^T F_\mathrm{B} v_\mathrm{B}\,\mathrm{d}t = \frac{v_\mathrm{B}}{v_\mathrm{A}}W_\mathrm{A} + \int_0^T \frac{\lambda}{2}\left(v_\mathrm{B}-v_\mathrm{A}\right)^2 v_\mathrm{B}\,\mathrm{d}t = 2W_\mathrm{A} + \lambda L\frac{\left(v_\mathrm{B}-v_\mathrm{A}\right)^2}{v_\mathrm{B}+v_\mathrm{A}}v_\mathrm{B} = \\ = 2W_\mathrm{A} + \frac{2\lambda L v_\mathrm{A}^2}{3}\,.$$

Hledaný poměr prací bude

$$\frac{W_\mathrm{B}}{W_\mathrm{A}} = 2 + \frac{2\lambda L v_\mathrm{A}^2}{3W_\mathrm{A}} = 2 + \frac{2v_\mathrm{A}^2}{gL} = 2{,}015\,.$$

Je zajímavé, že tento poměr nezávisí na délkové hustotě řetězu, ale závisí na tíhovém zrychlení, počáteční hloubce řetězu a rychlosti vytahováni.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha 50 ... koulí do okna 8 bodů

Jarda chtěl rozptýlit svého kamaráda v karanténě, a tak se rozhodl, že mu do okna hodí sněhovou kouli. Dolní rám okna je ve výšce $h_1 = 3{,}5\,\mathrm{m}$ a horní rám ve výšce $h_2 = 4{,}8\,\mathrm{m}$. Okno je široké $d = 2\,\mathrm{m}$. Jarda si stoupnul čtyři metry od paty domu tak, že stál přesně před středem okna. Jakou část plochy okna (v procentech) mohl zasáhnout, jestliže hodil koulí rychlostí $v = 8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ z výšky $H = 1{,}8\,\mathrm{m}$ nad zemí? *Jarda míří vysoko.*

Zavedeme si kartézskou soustavu souřadnic se středem v místě, kde stojí Jarda, tak, že rovina xy představuje zem a osa y směřuje k horizontálnímu středu okna. Jarda může koulí dohodit jen do určité části prostoru, která je vymezena útvarem, kterému se říká ochranná parabola (v našem trojrozměrném rotační paraboloid). Jeho rovnici si zde nebudeme odvozovat, ale v závislosti na vzdálenosti r od Jardových nohou je výška z tohoto útvaru

$$z = H + \frac{v^2}{2g} - \frac{r^2 g}{2v^2}\,.$$

Tam, kde paraboloid protíná okno, je hranice bodů, kam Jarda dohodí. Tyto body leží v pozemní vzdálenosti

$$r = \sqrt{D^2 + x^2}$$

od místa, kde Jarda stojí, přičemž $D = 4\,\mathrm{m}$ je vzdálenost Jardy od okna a x je poloha bodu od středu okna. Ochranný paraboloid tedy okno protíná v bodech

$$z = H + \frac{v^2}{2g} - \frac{D^2 g}{2v^2} - \frac{x^2 g}{2v^2}\,. \tag{4}$$

Plochu pod těmito body jednoduše spočítáme integrálem

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \left(H + \frac{v^2}{2g} - \frac{D^2 g}{2v^2} - \frac{(x^2)g}{2v^2}\right) \mathrm{d}x = \left[Hx + \frac{v^2}{2g}x - \frac{D^2 g}{2v^2}x - \frac{x^3 g}{6v^2}\right]_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} =$$

$$= \left(H + \frac{v^2}{2g} - \frac{D^2 g}{2v^2}\right) d - \frac{d^3 g}{24v^2}\,.$$

Nyní od této plochy odečteme oblasti zdi pod oknem, která je $h_1 d$, a získanou plochu vydělíme plochou okna $(h_2 - h_1)\,d$, abychom získali požadovaný poměr. Řešením úlohy tak je

$$\frac{H - h_1 + \frac{v^2}{2g} - \frac{D^2 g}{2v^2} - \frac{d^2 g}{24v^2}}{(h_2 - h_1)} = 23{,}9\,\%\,.$$

Důležité je ještě ověřit, jestli naše plocha nezasahuje i nad okno. Maximální výšku určíme z rovnice (4) dosazením $x = 0$. Po číselném dosazení dostaneme $z \doteq 3{,}8\,\mathrm{m}$, což je méně než h_1, takže plochu nad horní hranou okna zasáhnout nemůžeme.

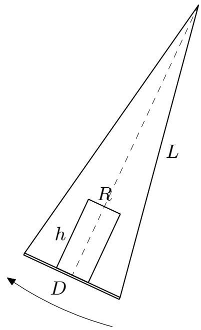
Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 51 ... láhev na houpačce

8 bodů

Jarda se harmonicky houpe na houpačce s frekvencí $f = 0{,}3\,\mathrm{Hz}$, přičemž má vedle sebe plnou láhev tvaru válce přesně uprostřed šířky houpačky. Láhev o výšce $h = 30\,\mathrm{cm}$ stojí na své podstavě o průměru $R = 3{,}0\,\mathrm{cm}$. Houpačka je široká $D = 40\,\mathrm{cm}$ a visí na lanech dlouhých $L = 1{,}4\,\mathrm{m}$. Tření mezi houpačkou a láhví je velké, takže láhev stojí na místě. Při jaké nejmenší amplitudě úhlu vychýlky houpačky se láhev začne kymácet?

Jardovi pořád něco padá.



Uvažujme soustavu spojenou s houpačkou. V té na láhev působí síly tíhová, reakce houpačky, setrvačná, třecí a odstředivá. Síly si rozložíme do směru kolmého k houpačce a rovnoběžného s ní a budeme zkoumat jejich momenty. Třecí síla působí tečně k houpačce a její působiště je v rovině spodní podstavy, proto nebude působit žádným momementem sil vzhledem k bodu, vůči kterému se láhev může rozkymácet.

Láhev se na houpačce začne kymácet, pokud moment sil působících rovnoběžně s rovinou houpačky bude větší než moment sil, které působí v ose lahve. Označme φ úhel vychýlení houpačky od svislice. Protože se Jarda houpe harmonicky, časová závislost velikosti tohoto úhlu je

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t) \ ,$$

kde φ_0 je maximální výchylka a $\omega = 2\pi f$. Úhlová rychlost a úhlové zrychlení budou

$$\dot{\varphi} = \omega\varphi_0 \cos(\omega t) = \omega\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} \,,$$
$$\ddot{\varphi} = -\omega^2\varphi_0 \sin(\omega t) = -\omega^2\varphi \,.$$

Začneme tíhovou silou. Tu rozložíme na dva kolmé směry, analogicky s nakloněnou rovinou. Ve směru do roviny houpačky působí síla

$$F_g^{\mathrm{n}} = mg\cos\varphi \,,$$

kde m je hmotnost láhve. Naopak velikost tíhové síly ve směru rovnoběžném s rovinou houpačky je

$$F_g^{\mathrm{t}} = mg\sin\varphi \,.$$

Obě dvě složky tíhové síly působí v těžišti láhve. Rameno momentů sil počítáme od spodního okraje láhve, přes který by se láhev teoreticky mohla otáčet. Pro výpočet velikosti momentů stačí vzít kolmou vzdálenost přímky síly od bodu otáčení, dostáváme

$$M_g^{\mathrm{n}} = Rmg\cos\varphi \,,$$
$$M_g^{\mathrm{t}} = \frac{h}{2}mg\sin\varphi \,.$$

Oba momenty působí proti sobě.

Nyní se budeme zabývat setrvačnými silami, které závisí na vzdálenosti od osy otáčení. Pro střed spodní podstavy láhve je to

$$l = \sqrt{L^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2} \doteq 1{,}386\,\mathrm{m} \,.$$

Označme x kolmou vzdálenost od roviny houpačky a uvažujme element láhve ve tvaru mezikruží o výšce $\mathrm{d}x$, šířce $\mathrm{d}r$ a ve vzdálenosti r od osy válce a x od roviny houpačky. Budeme zkoumat působení jednotlivých setrvačných sil na tento malý objem.

Začneme odstředivou silou. Úhlová rychlost je pro všechny body stejná, ale mění se vzdálenost od osy otáčení a směr síly. Mezikruží si rozdělme na úhlové elementy $\mathrm{d}\alpha$, kde α značí úhlovou vzdálenost takového elementu od přímky, která je rovnoběžná s osou houpání a leží v rovině zvoleného mezikruží. Označme β úhel, který svírá spojnice elementu $\mathrm{d}\alpha$ k ose houpání s osou kolmou na rovinu houpačky. Pak je velikost odstředivé síly

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F_\mathrm{o} &= \dot{\varphi}^2 \frac{l-x}{\cos\beta}\,\mathrm{d}m\,,\\ \mathrm{d}m &= \rho\,\mathrm{d}V \;= \rho r\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha\,.\end{aligned}$$

Tuto sílu rozložme na část, která působí do roviny houpačky, a na část rovnoběžnou s touto rovinou. Vzhledem ke kruhové symetrii je výslednice těchto rovnoběžných částí nulová. Naopak složky působící do houpačky jsou

$$\mathrm{d}F_\mathrm{o}^\mathrm{n} = \mathrm{d}F_\mathrm{o}\cos\beta = \dot{\varphi}^2\left(l-x\right)\rho r\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha\,.$$

Integrujme podle úhlu α, poté podle r a nakonec podle x

$$\begin{aligned}F_\mathrm{o} &= \int_0^h\int_0^R\int_0^{2\pi}\dot{\varphi}^2\left(l-x\right)\rho r\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x = \dot{\varphi}^2\rho\int_0^h\int_0^R 2\pi\left(l-x\right)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x =\\ &= 2\pi\dot{\varphi}^2\rho\int_0^h\frac{R^2}{2}\left(l-x\right)\mathrm{d}x = \pi R^2\dot{\varphi}^2\rho\left(lh-\frac{h^2}{2}\right).\end{aligned}$$

Nalezli jsme velikost odstředivé síly, spíše nás ale zajímá moment sil. Rameno síly bude $R+r\sin\alpha$, takže pro element momentu dostáváme

$$\mathrm{d}M_\mathrm{o} = \left(R + r\sin\alpha\right)\mathrm{d}F_\mathrm{o}\,.$$

Tento výraz opět integrujeme přes celý objem válce. Můžeme si všimnout, že hned po integraci přes úhel α dostaneme to samé, co při výpočtu síly, akorát vynásobené R. Výsledný moment bude

$$M_\mathrm{o} = RF_\mathrm{o} = \pi R^3\dot{\varphi}^2\rho h\left(l-\frac{h}{2}\right) = mR\dot{\varphi}^2\left(l-\frac{h}{2}\right).$$

Vidíme, že moment odstředivé síly je stejný, jako kdybychom všechnu hmotu tělesa nahradili hmotným bodem v těžišti. Tento moment samozřejmě vrací láhev do stojící polohy. Analogicky spočítáme moment setrvačné síly. Dospějeme k závěru, že na jednotlivé válcové elementy o výšce $\mathrm{d}x$ působí setrvačná síla

$$\mathrm{d}F_\mathrm{s} = \ddot{\varphi}\left(l-x\right)\mathrm{d}m = \pi\ddot{\varphi}\left(l-x\right)\rho R^2\,\mathrm{d}x\,.$$

Tyto síly také působí ve středech těchto tenkých válců a mají směr rovnoběžný s rovinou houpačky. Jejich rameno také počítáme od spodního okraje láhve a má délku x. Moment setrvačné síly je

$$M_\mathrm{s} = \int_0^h \pi\ddot{\varphi}\left(l-x\right)x\rho R^2\,\mathrm{d}x = \pi\ddot{\varphi}\rho R^2\left(\frac{lh^2}{2}-\frac{h^3}{3}\right) = \ddot{\varphi}mh\left(\frac{l}{2}-\frac{h}{3}\right).$$

Tento moment síly má stejný směr jako moment odstředivé síly, působí proti rozkymácení. Výsledný moment sil působících na láhev je

$$M = M_g^{\mathrm{t}} - M_{\mathrm{s}} - M_{\mathrm{o}} - M_g^{\mathrm{n}}\,,$$

přičemž pokud $M > 0$, láhev se začne kymácet. Dosazením do rovnice a jednoduchými úpravami dostáváme

$$M = \frac{h}{2} g \sin\varphi - \frac{h}{2}\omega^2\varphi\left(l - \frac{2}{3}h\right) - Rg\cos\varphi - R\omega^2\left(\varphi_0^2 - \varphi^2\right)\left(l - \frac{h}{2}\right).$$

Pro $\varphi = 0$ je zřejmě $M < 0$ a láhev je v tomto bodě stabilní. Řešením úlohy bude nalezení minimálního úhlu φ_0, pro který existuje úhel φ spňující $|\varphi| < \varphi_0$, přičemž platí $M(\varphi, \varphi_0) = 0$.

Místo ověřování všech možných kombinací φ a φ_0 můžeme postupovat tak, že pro všechna φ_0 spočítáme, v jakém φ má M maximum a ověříme, jestli je v daném φ a φ_0 moment kladný či záporný. Pro každé pevně zvolené φ_0 je moment M funkcí pouze proměnné φ, takže k hledání extrému použijeme derivaci

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{h}{2} g\cos\varphi - \frac{h}{2}\omega^2\left(l - \frac{2}{3}h\right) + Rg\sin\varphi + 2R\omega^2\varphi\left(l - \frac{h}{2}\right).$$

Položme tuto derivaci rovnou nule a označme řešení výsledné rovnice φ_{m}. Všimněme si, že φ_{m} nijak nezávisí na φ_0, což znamená, že maximum bude pro všechna φ_0 stejné. Přesněji řečeno by bylo stejné, pokud by byly přípustné všechny hodnoty φ. Jelikož platí $|\varphi| < \varphi_0$, pro $|\varphi_0| < |\varphi_{\mathrm{m}}|$ nebude bod s nulovou derivací ležet v dovoleném intervalu, takže maximum budeme muset hledat na hranici, tj. v bodech $\pm\varphi_0$.

Hodnotu φ_{m} musíme spočítat numericky. Jediná splňující $|\varphi_{\mathrm{m}}| \leq \pi/2$ vyjde $\varphi_{\mathrm{m}} \doteq -0{,}781$, ale v ní je $M(\varphi = \varphi_0 = \varphi_{\mathrm{m}})$ ještě meší, než M v nule. Zřejmě se nejedná o maximum, ale o minimum. To znamená, že pro kladné hodnoty φ by měl moment naopak růst, a to až do dalšího kořenu předchozí rovnice, který se nachází v bodě 1,633. Maxima momentů se proto pro $0 < \varphi_0 < \pi/2$ musí nacházet na hranici, což odpovídá bodu obratu.

Nyní ještě musíme najít minimální kladné φ_0, pro které platí $M(\varphi = \varphi_0) = 0$

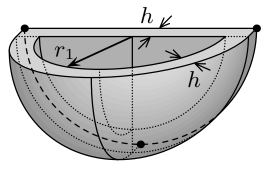
$$0 = M(\varphi = \varphi_0) = \frac{h}{2} g\sin\varphi_0 - \frac{h}{2}\omega^2\varphi_0\left(l - \frac{2}{3}h\right) - Rg\cos\varphi_0\,.$$

To je už přímočarý numerický výpočet, jehož výsledkem je $\varphi_0 \doteq 0{,}342$. Všimněme si, že pro $\varphi = = \varphi_0$ vypadl člen s odstředivou silou, protože v tomto okamžiku má láhev nulovou úhlovou rychlost.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 52 ... umývadlo

8 bodů



Umyvadlo má tvar čtvrtkoule s vnitřním poloměrem $r_1 = 30\,\mathrm{cm}$, na kterou dosedá zadní strana, která má tvar půlválce. Tloušťka všech stěn je $h = 2{,}0\,\mathrm{cm}$ a celé umyvadlo je vyrobeno z materiálu o hustotě $\rho = 3\,100\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Ke stěně je uchyceno ve dvou bodech nacházejících se na jeho rozích. Jeho spodní okraj se volně opírá o stěnu. Jakou minimální sílu musí každý z úchytů udržet, když je *umyvadlo zcela naplněné vodou? Předpokládejte, že spodní okraj působí na stěnu jen ve svém nejnižším bodě a pouze v normálovém směru.* *Dodo opravoval kohoutek v koupelně.*

Zadefinujme si najprv sústavu súradníc, v ktorej budeme úlohu riešiť. Nech jej počiatok je v strede hornej hrany umývadla, ktorá je zavesená na stene. Os x nech smeruje kolmo od steny, os y nadol a os z pozdĺž hrany. V statickej situácii musí byť súčet všetkých pôsobiacich síl nulový. Taktiež súčet momentov týchto síl musí byť nulový.

Nakoľko je rovina xy rovinou symetrie umývadla, pôsobí na umývadlo v ťažisku o súradniciach $(x_T, y_T, 0)$ tiažová sila kolmo nadol o veľkosti $F_g = mg$. Ďalej na spodnej hrane (v bode $(0, r_2, 0)$, kde $r_2 = r_1 + h$) pôsobí na umývadlo v smere kolmo od steny sila neznámej veľkosti $\mathbf{F}_1 = (F_1, 0, 0)$. Nakoniec, v bodoch závesu (teda $(0, 0, \pm r_2)$) pôsobí na umývadlo neznámym smerom sila $\mathbf{F}$. Ak však má byť veľkosť tejto sily čo najmenšia, musia byť jej zložky $\mathbf{F} = (F_x, F_y, 0)$.

Rovnováha síl nám dáva rovnice

$$F_1 + 2F_x = 0\,,$$
$$F_g + 2F_y = 0\,.$$

Z rovnováhy momentov máme pre počiatok jednu netriviálnu rovnicu

$$-r_2 F_1 + x_T F_g = 0\,.$$

Celkovo máme tri rovnice pre tri neznáme, pričom hľadáme veľkosť sily

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \frac{mg}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{x_T}{r_2}\right)^2}\,. \tag{5}$$

Musíme teda ešte zistiť hmotnosť plného umývadla a x-ovú súradnicu jeho ťažiska. Pozrime sa najprv na teleso tvaru štvrťgule s polomerom R a homogénnym rozložením hustoty. Jeho objem je zrejme

$$V(R) = \frac{\pi}{3}R^3\,,$$

určiť polohu ťažiska je však ťažšie. Ak objekt umiestnime do súradnicovej sústavy rovnako ako umývadlo, zo zrkadlenia rovinou xy máme $z_T = 0$, zo symetrie voči rovine $x = y$ máme $x_T = y_T$. Ťažisko sa teda musí nachádzať niekde na tejto priamke. Pre polohu ťažiska homogénneho telesa platí definičný vzťah

$$\mathbf{x}_T = \frac{1}{M}\int_V \rho(\mathbf{x})\,\mathbf{x}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\int_V \mathbf{x}\,\mathrm{d}V\,.$$

Nás zaujíma x-ová zložka ťažiska, ktorú si označíme X_T. Prejdeme do sférických súradníc (r, θ, φ), kde $r \in \langle 0, R\rangle$ je vzdialenosť od počiatku, $\theta \in \langle 0, \pi\rangle$ je sklon od osi z a $\varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ je uhol medzi priemetom polohového vektora do roviny xy a osou x. Transformačný vzťah je $x = r\sin\theta\cos\varphi$, diferenciál objemu se zmení na $\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$.

Z definičného vzťahu máme

$$
\begin{aligned}
X_T &= \frac{1}{V}\int_V x\,\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^3\sin^2\theta\cos\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{1}{V}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\cos\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \frac{R^4}{4V}\left[\sin\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \\
&= \frac{R^4}{4V}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{R^4}{4V}\left[\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right]_0^{\pi} = \frac{\pi R^4}{8V} = \frac{3}{8}R\,.
\end{aligned}
$$

Získané znalosti teraz môžeme dať dohromady. S výhodou budeme pri počítaní uvažovať, že umývadlo je zložené z jednej štvťgule o polomere r_2 s hustotou ρ a stredom v bode $(h,0,0)$, štvrťgule o polomere r_1 s hustotou $\rho_\mathrm{v} - \rho < 0$ so stredom v tom istom bode, a polvalcom tvoriacom zadnú stenu umývadla s polomerom r_2 a výškou h. Veličinou ρ_v sme označili hustotu vody. Pre celkovú hmotnosť máme

$$
m = \frac{\pi}{3}r_2^3\rho + \frac{\pi}{3}r_1^3\left(\rho_v - \rho\right) + \frac{\pi}{2}r_2^2 h\rho \doteq 56{,}97\,\mathrm{kg}\,.
$$

Urobením váženého priemeru pre polohu ťažiska v x-ovom smere dostávame

$$
\begin{aligned}
x_T &= \frac{1}{m}\left[\frac{\pi}{3}r_2^3\rho\left(h + \frac{3}{8}r_2\right) + \frac{\pi}{3}r_1^3\left(\rho_v - \rho\right)\left(h + \frac{3}{8}r_1\right) + \frac{\pi}{2}r_2^2 h\rho\frac{h}{2}\right]\,, \\
x_T &\doteq 12{,}5\,\mathrm{cm}\,.
\end{aligned}
$$

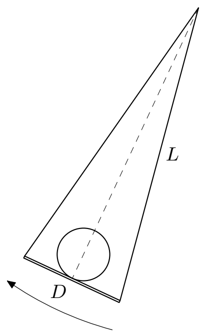
Toto už len stačí dosadiť do rovnice (5) a dostávame veľkosť potrebnej sily $F \doteq 300\,\mathrm{N}$, ktorú musí uniesť každý z úchytov umývadla.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha 53 ... láhev na houpačce reloaded 8 bodů

Jarda se harmonicky houpe na houpačce s frekvencí $f = 0{,}5\,\mathrm{Hz}$ a maximální vychýlkou 5°, přičemž přesně uprostřed šířky houpačky přidržuje prázdnou, poměrně úzkou a dlouhou láhev ve tvaru válce. Láhev je položena vodorovně a její osa je kolmá na směr pohybu. Houpačka je široká $D = 40\,\mathrm{cm}$ a visí na lanech dlouhých $L = 3\,\mathrm{m}$. Jarda láhev při průchodu rovnovážnou polohou pustí. Za jak dlouho láhev vypadne z houpačky? Předpokládejte, že neprokluzuje.

Jarda vypil víno a přemýšlel nad úlohami.



Uvažujme soustavu spojenou s houpačkou. V té na láhev působí síly tíhová, reakce houpačky, setrvačná, odstředivá a Coriolisova. Síly si rozložíme do směru kolmého k rovině houpačky a rovnoběžného s ní.

Začneme Coriolisovou silou. Pokud se láhev v rotující vztažné soustavě pohybuje, působí tato síla kolmo k rychlosti pohybu. Jelikož se láhev valí po podložce, tato síla působí pouze do ní nebo naopak z ní. V prvním případě je kompenzována reakcí desky, ve druhém je zase menší než složka tíhové a odstředivé síly působící do desky (jak ověříme níže), proto se láhev nevznese.

Pokračujme odstředivou silou. Ta není v celém objemu lahve konstantní, ale protože velikost lahve je ve srovnání se vzdáleností od osy otáčení malá, můžeme celkovou velikost této síly spočítat, jako by láhev byla hmotným bodem umístěným v jejím těžišti. Výslednice potom leží na přímce osa otáčení – těžiště lahve, nepůsobí tedy kolmo na podložku. Její velikost je

$$F_\mathrm{o} = m\dot{\varphi}^2 \frac{L}{\cos\alpha}\,,$$

kde m je hmotnost lahve, $\dot{\varphi}$ je úhlová rychlost houpačky a α je úhel u osy otáčení směrem k lahvi a ke středu houpačky. Vzdálenost mezi osou otáčení a středem houpačky sice není přesně L, za daných rozměrů je však tato aproximace adekvátní. Protože láhev je úzká, neuvažujeme vzdálenost těžiště lahve od desky houpačky. Odstředivou sílu rozložme na dvě složky. Složka kolmá k houpačce bude kompenzována reakcí desky, složka paralelní s rovinou desky má velikost

$$F_\mathrm{o}^\mathrm{t} = F_\mathrm{o}\sin\alpha = m\dot{\varphi}^2 L \operatorname{tg}\alpha = m\dot{\varphi}^2 x\,,$$

kde x je vzdálenost lahve od středu houpačky.

Složku tíhové síly rovnoběžnou s rovinou houpačky určíme stejně jako na nakloněné rovině

$$F_g^\mathrm{t} = mg\sin\varphi\,,$$

kde m je hmotnost láhve, $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t)$ je úhel okamžité výchylky houpačky z rovnovážné polohy, $\varphi_0 = 5^\circ$ je maximální výchylka, $\omega = 2\pi f$ je úhlová frekvence houpání a t je čas od puštění láhve. Protože maximální výchylka je malá, můžeme použít aproximaci $\sin x \approx x$, pak se nám síla zjednoduší na $F_g^\mathrm{t} \approx mg\varphi$.

Druhá složka tíhové síly má při malém úhlu φ_0 přibližně velikost mg. Maximální velikost Coriolisovy síly je $2\omega m\varphi_0 v \doteq 0{,}55mv$. Aby byla větší než příslušná složka tíhové síly, musela by rychlost lahve být přibližně $18\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, což se za daných podmínek nestane.

Ještě tu je setrvačná síla, protože houpačka zpomaluje a zrychluje. Díky tomu, že láhev je ve srovnání s délkou závěsu malá, můžeme uvažovat homogenní setrvačné zrychlení o velikosti

$$a_\mathrm{s} \approx \ddot{\varphi} = -\varphi_0\omega^2 \sin(\omega t)\, L = -\omega^2 L\varphi\,,$$

přičemž úhlové zrychlení jsme získali dvojí derivací výchylky podle času. Setrvačná síla má velikost $F_\mathrm{s} = ma_\mathrm{s}$ a působí proti směru zrychlení houpačky, tedy směrem „nahoru“, tj. opačně než složka tíhové síly rovnoběžná s houpačkou. Velikost této síly je nezávislá na poloze láhve na houpačce, protože při změně místa se sice zvětší vzdálenost od osy místa závěsu lan, ale také se změní směr síly. Průmět do směru rovnoběžného s rovinou zůstane stejný.

Nyní můžeme konstatovat, že velikost tečné složky odstředivé síly F_o^t je vůči setrvačné a tečné složce tíhové síly zanedbatelná, protože se v ní vyskytuje malý úhel φ_0 ve druhé mocnině, zatímco v obou dalších jmenovaných silách je jen v první.

Výsledná síla uvádějící láhev do pohybu má velikost

$$F = F_g^\mathrm{t} - F_\mathrm{s} = m\varphi\left(g - \omega^2 L\right)\,.$$

Můžeme si všimnout zajímavého faktu – pokud by se houpačka houpala s „přirozenou“ frekvencí, neboli jako (matematické) kyvadlo, úhlová frekvence houpání by při našich aproximacích byla rovna právě $\omega^2 = \frac{g}{L}$. Závorka by potom byla rovna nule a žádná síla by ve směru roviny houpačky nepůsobila a láhev by zůstávala na místě.

Nyní už známe sílu působící na láhev. Ta působí ve středu láhve (protože délka závěsu je dlouhá v porovnání s poloměrem láhve), takže moment síly vůči bodu doteku s houpačkou je $M = RF$, kde R je poloměr láhve. Moment setrvačnosti láhve vůči tomuto bodu je podle Steinerovy věty

$$J = J_\mathrm{s} + mR^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2\,,$$

kde $J_\mathrm{s} = mR^2$ je moment setrvačnosti prázdného válce (zanedbáváme dno a uzávěr). Označme x vzdálenost v rovině houpačky od jejího středu, potom

$$\ddot{x} = \varepsilon R = \frac{MR}{J} = \frac{\varphi\left(g - \omega^2 L\right)}{2} = \frac{\varphi_0\left(g - \omega^2 L\right)}{2}\sin(\omega t)\ ,$$

kde ε označuje úhlové zrychlení rotace láhve. Integrací získáme rychlost

$$\dot{x} = -\frac{\varphi_0\left(g - \omega^2 L\right)}{2\omega}\cos(\omega t) + C\,.$$

Podle zadání $\dot{x}(0) = 0$, takže

$$C = \frac{\varphi_0\left(g - \omega^2 L\right)}{2\omega} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{\varphi_0\left(g - \omega^2 L\right)}{2\omega}\left(1 - \cos(\omega t)\right)\ .$$

Integrací rychlosti získáme polohu v závislosti na čase

$$x = \frac{\varphi_0\left(g - \omega^2 L\right)}{2\omega}\left(t - \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\right) = \frac{\varphi_0}{2}\left(\frac{g}{\omega^2} - L\right)\left(\omega t - \sin(\omega t)\right)\ .$$

Zde byla integrační konstanta nulová. Láhev vypadne, jakmile bude vzdálenost od středu $|x|$ větší než $\frac{D}{2}$. Pro takový čas t platí

$$D = \left|\varphi_0\left(\frac{g}{\omega^2} - L\right)\left(\omega t - \sin(\omega t)\right)\right|\ .$$

Rovnici musíme řešit numericky. Hledaný čas je $t \doteq 0{,}86\,\mathrm{s}$.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha 54 ... minimalizace zrychlení 7 bodů

Jedeme autem rychlostí $v_0 = 20{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Pro jednoduchost budeme auto považovat za hmotný bod. Všimneme si, že se blíží zatáčka a vidíme, že přesně na jejím konci budeme muset zastavit na semaforu. Vzhledem k tomu, že pojišťovna chce, aby zrychlení bylo co nejmenší, budeme chtít, aby maximální hodnota zrychlení působící na auto (do zastavení na semaforech) byla co nejmenší. Pokud začneme brzdit $d = 30{,}0\,\mathrm{m}$ od zatáčky, jejíž poloměr je $R = 10{,}0\,\mathrm{m}$, zatočíme na ní o $22{,}5^\circ$ a chceme minimální zrychlení, za jakou dobu dojedeme na konec zatáčky od počátku brzdění? *Karlova pojišťovna na minimálním zrychlení trvá.*

Označme si zrýchlenie, ktorým budeme brzdiť a. Najprv pôjdeme vzdialenosť d rovnomerne spomaleným pohybom, to je pomerne jednoduché, z rovnice pre dráhu takéhoto pohybu dostaneme čas

$$d = v_0 t_1 - \frac{1}{2} a t_1^2 \,,$$

$$t_1 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2ad}}{a} \,,$$

kde koreň s kladným znamienkom (+) pred odmocninou sme neuvažovali, pretože zodpovedá situácii, kedy by auto neprestalo zrýchľovať ani po zastavení a teda sa potom vrátilo späť. Auto teda na začiatku zákruty bude mať rýchlosť $v_1 = v_0 - at_1 = \sqrt{v_0^2 - 2ad}$.

Ďalej je však situácia zložitejšia, nakoľko okrem brzdenia bude auto aj zabáčať, do hry vstúpi dostredivé zrýchlenie, ktorého smer je v každom momente kolmý na brzdenie. Veľkosť dostredivého zrýchlenia môžeme spočítať napríklad zo vzorca $a_\mathrm{d} = v^2/R$. Ak ďalej nechceme v súčte prekročiť zrýchlenie a na brzdenie zostáva $a_\mathrm{b} = \sqrt{a^2 - v^4/R^2}$. Ak si teda označíme veľkosť rýchlosti v čase t ako $v(t)$, dostaneme diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \sqrt{a^2 - v^4/R^2} \,.$$

Tá je síce separovateľná, ale z integrálu výjdu hypergeometrické funkcie. Navyše ešte musíme zistiť, akú dráhu počas tohto pohybu auto prešlo, aby sme sa dozvedeli, či zastavilo pred semaforom. Ak nás teda nenapadne nejaký inteligentný spôsob ako to obísť, neostáva nám nič iné, než riešiť úlohu numericky.

Náčrt algoritmu: Zvolíme zrýchlenie a analyticky spočítame rýchlosť auta na začiatku zákruty a čas, za ktorý sa tam dostane. Potom pôjdeme po malých krokoch a v každom spočítame, o koľko sa auto posunie (a pripočítame to k celkovej dráhe, ktorú počas zákruty prešlo), a o koľko spomalí (a odčítame to od jeho rýchlosti). Keď rýchlosť klesne pod 0 (auto zastaví), pozrieme sa, koľko auto stihlo prejsť a porovnáme to s dĺžkou zákruty, ktorá je $\pi R/8$. Ak auto prešlo viac, znamená to, že musíme zrýchlenie zvýšiť a naopak. Potom celý proces s takto pozmeneným zrýchlením opakujeme.

Čo sa týka pozmenenia zrýchlenia – núka sa metóda polenia intervalu, kde ako počiatočný interval môžeme zvoliť interval medzi $a_\mathrm{min} = v_0^2/(2d + R)$ (pri tomto zrýchlení dôjde auto na začiatok zákruty s rýchlosťou, pre ktorú je dostredivé zrýchlenie rovné a_min, čiže pre akékoľvek menšie zrýchlenie by auto nebolo schopné zákrutu vytočiť) a $a_\mathrm{max} = v_0^2/(2d)$ (pri tomto zrýchlení auto zastaví presne pred zákrutou). Hľadané zrýchlenie teda určite bude medzi týmito dvomi hodnotami, zvolením tohto intervalu sme sa vyhli všetkým potenciálnym odmocninám zo záporných čísel. Teraz sa núka otázka dokedy budeme interval poliť? Zadanie sa pýta na čas, ako dlho bude celé brzdenie trvať, takže na oboch hraniciach intervalu si okrem zrýchlenia budeme pamätať aj čas dosiahnutý pri tomto zrýchlení. Poliť interval budeme dokiaľ tieto 2 časy nebudú mať menší rozdiel, než je presnosť požadovaná úlohou.

```
import numpy as np
v0 = 20
d = 30
R = 10
l = np.pi * R / 8
```

```
amin = v0 * v0 / (2 * d + R)
amax = v0 * v0 / (2 * d)
tmin = 0.
tmax = 10000.
dt = 0.0001
while abs(tmin - tmax) > 10 * dt:
   a = (amin + amax) / 2
   v = np.sqrt(v0 * v0 - 2 * a * d)
   t1 = (v0 - v) / a
   s = 0.0
   i = 0
   while v > 0:
     i += 1
     s += v * dt
     at = np.sqrt(a * a - v * v * v * v / R / R)
     v -= at * dt
   if s < l:
     amax = a
     tmin = t1 + i * dt
   else:
     amin = a
     tmax = t1 + i * dt
print(tmin)
print(tmax)
print(a)
```

Kód skonverguje a povie nám, že optimálne zrýchlenie je približne $6\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, čas brzdenia preň bude $3{,}42\,\mathrm{s}$.

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha M.1 ... lodička

3 body

Lego chce na lodičce přeplout řeku širokou $l = 5{,}0\,\mathrm{m}$, přičemž umí veslovat nejvýše rychlostí $v_\mathrm{L} = 1{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a proud má v celé řece rychlost $v_\mathrm{P} = 0{,}50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Za jaký nejkratší čas se mu to může podařit, jestliže ho nezajímá, jak daleko ho proud odnese? *Lego se nechal unést.*

Ak nás nezaujíma, ako ďaleko nás prúd odnesie, tak nám stačí pádlovať celou silou kolmo na rieku. Zložka rýchlosti v smere kolmom na rieku tak bude rovná v_L (zatiaľ čo zložka rýchlosti v smere prúdu rieky bude v_P). Na druhú stranu sa teda dostaneme za čas

$$t = \frac{l}{v_\mathrm{L}} = 5{,}0\,\mathrm{s}\,.$$

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha M.2 ... lodička reloaded 3 body

Lego chce na lodičce přeplout řeku širokou $l = 5{,}0\,\mathrm{m}$, přičemž umí veslovat nejvýše rychlostí $v_\mathrm{L} = 1{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a proud má v celé řece rychlost $v_\mathrm{P} = 0{,}50\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Za jaký nejkratší čas se může dostat na druhou stranu, pokud se chce pohybovat vždy kolmo na směr proudu? *Lego zjistil, že nejkratší cesta není vždy nejrychlejší.*

Na to, aby sme šli vždy kolmo na rieku, musíme pádlovať tak, aby sa zložka rýchlosti pádlovania v smere rieky vyrušila s rýchlosťou prúdu, čiže veľkosť tejto zložky musí byť rovná v_P. Tým pádom zložka kolmá na rieku bude

$$v_\mathrm{n} = \sqrt{v_\mathrm{L}^2 - v_\mathrm{P}^2} \doteq 0{,}87\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Čiže rieku prekročíme za čas

$$t = \frac{l}{v_\mathrm{n}} \doteq 5{,}8\,\mathrm{s}\,.$$

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha M.3 ... lodička revolutions 3 body

Lego chce na lodičce přeplout řeku širokou $l = 5{,}0\,\mathrm{m}$, přičemž umí veslovat nejvýše rychlostí $v_\mathrm{L} = 1{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Zase se chce pohybovat vždy kolmo na řeku, ale pršelo a proud se zdá být rychlejší. Pro jakou nejmenší rychlost proudu to už nebude možné?

Legolas potřeboval ještě jednu úlohu do série.

V minulej úlohe sme spočítali, že keď sa chceme pohybovať kolmo na rieku, tak veľkosť výslednej rýchlosti bude

$$v_\mathrm{n} = \sqrt{v_\mathrm{L}^2 - v_\mathrm{P}^2}\,,$$

kde v_P je rýchlosť prúdu. Tento výraz nám pre všetky $v_\mathrm{P} < v_\mathrm{L}$ vráti kladnú výslednú rýchlosť, čiže pre rýchlosti prúdu menšie, než je naša maximálna rýchlosť sa budeme vedieť dostať na druhú stranu.

Pre $v_\mathrm{P} > v_\mathrm{L}$ rovnica pre v_n nedáva zmysel, čiže pre tieto rýchlosti sa na druhú stranu nedostaneme. No a v hraničnom prípade, keď $v_\mathrm{P} = v_\mathrm{L}$ dostávame, že výsledná rýchlosť bude nulová, čiže budeme veslovať na mieste a prúd nás nebude odnášať.

No nebudeme sa hýbať ani smerom k brehu, čiže už pre $v_\mathrm{P} = v_\mathrm{L} = 1{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ sa nebudeme vedieť dostať na druhú stranu.

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha M.4 ... lodička resurrections 4 body

Lego chce na lodičce přeplout řeku širokou $l = 6{,}0\,\mathrm{m}$, přičemž umí veslovat nejvýše rychlostí $v_\mathrm{L} = 1{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Proud má v celé řece rychlost $v_\mathrm{P} = 1{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Z předcházející úlohy už ví, že v této situaci už není možné plout kolmo na řeku. Zajímalo by ho ale, jaká je minimální vzdálenost, o kterou ho proud odnese, než dopluje na druhou stranu. *Lego optimalizuje.*

Jedna možnosť ako úlohu vyriešiť je vyjadriť si vzdialenosť, o ktorú budeme odnesení pre všeobecný smer pádlovania a potom nájsť jej minimum (napríklad derivovaním).

Druhá možnosť je geometrická úvaha. Na vyjadrenie vzdialenosti, o ktorú nás prúd odnesie nám stačí smer výslednej rýchlosti. Aby bola táto vzdialenosť minimálna, tak uhol zovretý týmto smerom a smerom prúdu musí byť maximálny, čo nastane vtedy, keď bude smer pádlovania kolmý na výslednú rýchlosť (čiže trojuholník, ktorý sa skladajá z rýchlosti prúdu, rýchlosti pádlovania a výslednej rýchlosti bude pravouhlý, pričom preponu bude tvoriť rýchlosť prúdu). Maximálny uhol medzi výsledným smerom a brehom teda môžeme spočítať ako

$$\varphi = \arcsin \frac{v_\mathrm{L}}{v_\mathrm{P}} \doteq 42^\circ\,.$$

Následne vzdialenosť, o ktorú nás prúd odnesie dostaneme ako

$$d = \frac{l}{\mathrm{tg}\,\varphi} \doteq 6{,}7\,\mathrm{m}\,.$$

Pri dosadení si treba všimnúť, že šírka rieky v tejto úlohe je o meter väčšia.

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha E.1 ... vybíjíme kondenzátor 3 body

Vybíjíme kondenzátor o kapacitě $C = 42{,}0\,\mathrm{mF}$ přes rezistor o odporu $R = 9{,}81\,\mathrm{k\Omega}$. Víme, že pro napětí v čase platí rovnice $u(t) = U_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$. Za jakou dobu bude mít elektrické pole kondenzátoru poloviční energii oproti stavu, kdy je plně nabitý?

Karel chtěl, aby se s vybíjením seznámili účastníci.

Pro energii kondenzátoru platí vztah

$$E = \frac{1}{2} C U^2\,.$$

Zadání proto lze popsat následující rovnicí

$$\frac{1}{4} C U_0^2 = \frac{1}{2} C U_0^2 \mathrm{e}^{-2\frac{t}{RC}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \mathrm{e}^{-2\frac{t}{RC}}\,,$$

kde hledaná neznámá je t.

Nyní máme dva přístupy k řešení. Rovnici můžeme dosadit přímo do nějakého programu, který ji za nás rovnou vyřeší. Jako příklad uveďme třeba Wolfram Alpha.[6] Dostáváme pak rovnou výsledek $t \doteq 143\,\mathrm{s}$.

Pokud známe logaritmy, můžeme zvolit analytickou cestu, která také není složitá. Využijeme toho, že $x = \mathrm{e}^{\ln x}$, a rovnici upravíme na

$$\frac{1}{2} = \mathrm{e}^{\ln \frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{-\ln 2} \quad \Rightarrow \quad -\ln 2 = -2\frac{t}{RC}\,,$$

$$t = \frac{RC}{2} \ln 2 \doteq 143\,\mathrm{s}\,.$$

Energie na kondenzátoru klesne na polovinu za 143 s.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Vojtěch David
vojtech.david@fykos.cz

[6] https://www.wolframalpha.com/input/?i=exp%5B-2*t%2F%289.81*10%5E3*42*10%5E%28-3%29%29%5D+%3D+1%2F2

Úloha E.2 ... vodivá žvýkačka 4 body

Rado žvýká žvýkačku s měrným elektrickým odporem $\rho = 1\,\mathrm{m\Omega{\cdot}mm}$ a objemem $V = 1\,\mathrm{cm^3}$. Rozdělí ji napůl a každou polovinu využije celou jako samostatný vodič. V batohu má spotřebič s vnitřním odporem $R = 1\,\Omega$, který může být napájený maximálním napětím $U_{\max} = 5\,\mathrm{V}$, a zdroj stejnosměrného napětí $U = 12\,\mathrm{V}$. Do jaké minimální vzdálenosti l musí od sebe umístit spotřebič a zdroj, jestliže je chce spojit vodiči z žvýkačky konstantního průřezu?

Rado měl po dlouhé době žvýkačku.

Objem oboch žuvačiek je

$$V_\mathrm{z} = \frac{V}{2} = Sl\,,$$

kde S je plocha podstavy valca a l jeho dĺžka (resp. vzdialenosť spotrebiča od zdroja). Odpor jednej žuvačky vyrátame pomocou merného elektrického odporu nasledovne

$$R_\mathrm{z} = \rho\frac{l}{S} = \rho\frac{l^2}{V_\mathrm{z}} = 2\rho\frac{l^2}{V}\,.$$

Celkový odpor obvodu je $R_\mathrm{c} = 2R_z + R$. Z Ohmovho zákona

$$U = R_\mathrm{c} I = (2R_\mathrm{z} + R)I = \left(4\rho\frac{l^2}{V} + R\right)I\,,$$

kde $I = \frac{U_{\max}}{R}$, a teda

$$l = \sqrt{\frac{VR\left(\frac{U}{U_{\max}} - 1\right)}{4\rho}} \doteq 0{,}59\,\mathrm{m}\,.$$

Radovan Lascsák
radovan.lascsak@fykos.cz

Úloha E.3 ... levný voltmetr 3 body

Voltmetr na střídavý proud (tj. měřič AC napětí) po fyzikální stránce funguje následovně. Ze vstupního napětí se nejprve odfiltruje stejnosměrná složka užitím nízkofrekvenčního filtru. Následně se získané napětí usměrní a uhladí vysokofrekvenčním filtrem. Toto jednosměrné napětí se změří a převede pomocí numerického faktoru na údaj zobrazený na displeji. Tento faktor je volený tak, aby pro harmonický průběh napětí byla na displeji zobrazena jeho efektivní hodnota. Jakou hodnotu bude přístroj ukazovat, pokud bude mít vstupní střídavé napětí pilovitý průběh, jež osciluje mezi hodnotami $U_1 = 0{,}00\,\mathrm{V}$ a $U_2 = 1{,}00\,\mathrm{V}$?

Dodo krade nápady na úlohy na KDF.

Najprv určíme numerický faktor používaný prístrojom. Pre harmonické napätie dané vzťahom $U = U_0\sin(\omega t)$, ktoré nemá jednosmernú zložku (časový priemer napätia je nulový), dostávame po usmernení priebeh napätia $U = U_0\left|\sin(\omega t)\right|$. Následné zhladenie z neho vytvorí priemernú hodnotu. Usmernený signál je π-periodický, stačí nám teda priemerovať

$$U_\mathrm{m} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi U_0 \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2}{\pi}U_0\,.$$

Toto namerané napätie musíme prenásobiť prevodným faktorom a, aby sme dostali efektívnu hodnotu danú strednou hodnotou druhej mocniny napätia

$$U_{\mathrm{ef}} = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} U_0^2 \sin^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0 \,.$$

Prevodný faktor má teda hodnotu

$$a = \frac{U_{\mathrm{ef}}}{U_{\mathrm{m}}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \,.$$

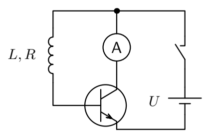
V prípade s pílovitým priebehom musíme najprv odstrániť jednosmernú zložku – dlhodobý časový priemer je rovný $U = 0{,}50\,\mathrm{V}$ a vzniknutý pílovitý priebeh má teda hodnoty medzi $-0{,}50\,\mathrm{V}$ a $0{,}50\,\mathrm{V}$. Po usmernení dostávame po sebe nasledujúce trojuholníky, všetky so základňou na časovej osi a výškou $0{,}50\,\mathrm{V}$.

Po zhladení teda dostávame priemernú hodnotu napätia $U'_{\mathrm{m}} = 0{,}25\,\mathrm{V}$ a po prevode v prístroji na „efektívnu hodnotu“ sa na displeji zobrazí údaj $U_{\mathrm{d}} = aU'_{\mathrm{m}} \doteq 0{,}28\,\mathrm{V}$. Pre informáciu, skutočná hodnota efektívnej hodnoty je $U'_{\mathrm{ef}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{V} \doteq 0{,}58\,\mathrm{V}$ teda takmer dvakrát vyššia.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha E.4 ... cívka na bázi 4 body

Mějme obvod se zdrojem stejnosměrného napětí ($U > 50\,\mathrm{V}$) cívkou o indukčnosti $L = 5\,\mathrm{H}$ a odporu $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$, tranzistorem NPN, ideálním ampérmetrem a spínačem. Sepneme-li spínač, ampérmetr začne po nějaké době ukazovat proud $I = 1\,\mathrm{A}$. V jakém čase po sepnutí obvodu ampérmetr ukazoval hodnotu $I' = 500\,\mathrm{mA}$?



Vojta nesestavoval bombu.

Všimněme si, že díky $U > 50\,\mathrm{V}$ lze zanedbat napětí na přechodu báze-emitor. Označme proudový zesilovací činitel tranzistoru β. Nyní jsme schopni určit, že cívkou po ustálení procházel proud $I_{\max} = I/\beta$.

Také určíme, že v čase, kdy ampérmetr ukazoval hodnotu I', musel cívkou procházet proud $I_L = I'/\beta$. Dále postupujme s využitím následujícího vztahu pro časovou závislost proudu procházejícího cívkou, který lze například odvodit vyřešením diferenciální rovnice pro vlastní indukci,

$$I_L = I_{\max}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right) ,$$

odkud dosazením za proudy a následnou úpravou dostaneme

$$t = \frac{L}{R}\ln\!\left(\frac{I}{I - I'}\right) \doteq 0{,}35\,\mathrm{ms} \,.$$

Vojtěch David
`vojtech.david@fykos.cz`

Úloha X.1 ... stáhnu ji s sebou

3 body

Máme kouli vzduchu s poloměrem $R = 2{,}1\,\mathrm{cm}$, která je obalená vrstvou polystyrenu o tloušťce $t = 2{,}1\,\mathrm{cm}$ a hustotě $\rho = 33\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Pevným provázkem ji připojíme k siloměru, za který ji stáhneme do poloviny objemu pod hladinu. Jakou sílu naměříme na siloměru?

Karel přemýšlel o balonech.

Siloměr bude ukazovat rozdíl vztlakové síly, jíž bude koule nadnášena, a tíhové síly, která na ni působí (kde vzhledem k požadované přesnosti zanedbáme hmotnost vzduchu v kouli). Objem polystyrenu pak vypočítáme jako rozdíl objemu celé koule V_k a objemu vzduchu V_v. Hustotu vody označme ρ_v. Dostáváme tak

$$F = F_\mathrm{vz} - F_g = \frac{1}{2}V_\mathrm{k}\rho_\mathrm{v}g - \left(V_\mathrm{k} - V_\mathrm{v}\right)\rho g = \\ = \frac{2}{3}\pi\left(R+t\right)^3\rho_\mathrm{v}g - \left(\frac{4}{3}\pi\left(R+t\right)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3\right)\rho g \doteq 1{,}43\,\mathrm{N}\,.$$

Vojtěch David
vojtech.david@fykos.cz

Úloha X.2 ... na dno přehrady

4 body

Máme kus polystyrenu o hmotnosti $m_0 = 1{,}25\,\mathrm{kg}$ a hustotě $\rho_0 = 27\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a chceme ho zcela ponořit na dno vodní nádrže. Máme k dispozici dostatek kamene o hustotě $\rho = 2\,650\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Jakou minimální hmotnost bude mít kámen, který musíme k polystyrenu připevnit?

Karel přemýšlel nad Archimédem.

Hledanou hmotnost kamene označme m. Na systém polystyren-kámen po ponoření do vody působí vztlaková $F_\mathrm{vz} = V\rho g$ a tíhová síla $F = Mg$, kde $V = \frac{m_0}{\rho_0} + \frac{m}{\rho}$ je celkový objem a $M = m_0 + m$ je celková hmotnost.

V krajním případě bude velikost tíhové síly stejná jako velikost síly vztlakové

$$(m_0 + m)g = \left(\frac{m_0}{\rho_0} + \frac{m}{\rho}\right)\rho_\mathrm{v}g\,,$$

kde $\rho_\mathrm{v} = 998\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ je hustota vody.

Řešením této rovnice získáme

$$m = m_0\frac{\frac{\rho_\mathrm{v}}{\rho_0} - 1}{1 - \frac{\rho_\mathrm{v}}{\rho}} \doteq 72{,}1\,\mathrm{kg}\,.$$

Adam Mendl
adam.mendl@fykos.cz

Úloha X.3 ... neznámá koule v neznámé vodě

4 body

Máme kouli s neznámým poloměrem ponořenou v kapalině s neznámou (ale konstantní) hustotou. Víme, že rozdíl tlaků mezi horním a dolním bodem koule je $\Delta p = 850\,\mathrm{Pa}$ a celková vztlaková síla působící na kouli je $F_\mathrm{vz} = 150\,\mathrm{N}$. Jaká je hustota kapaliny?

Lego vymýšlel úlohy na vztlak.

Vieme, že rozdiel hydrostatického tlaku môžeme vyjadriť pomocou vzorca $\Delta p = \Delta h \rho g$. V našom prípade výškový rozdiel medzi horným a dolným bodom gule jej priemer, čiže dvojnásobok polomeru ($\Delta h = 2r$). Z toho si môžeme vyjadriť polomer gule ako

$$r = \frac{\Delta p}{2\rho g}\,.$$

A keďže je objem gule $V = 4/3\pi r^3$, tak nám stačí dosadiť všetky spomenuté vzorčeky do vzorca na vztlakovú silu

$$F_{\mathrm{vz}} = V\rho g = \frac{4}{3}\pi \frac{\Delta p^3}{8\rho^3 g^3}\rho g\,,$$

odkiaľ si môžeme vyjadriť hustotu neznámej kvapaliny

$$\rho = \sqrt{\frac{\pi \Delta p^3}{6F_{\mathrm{vz}} g^2}} \doteq 150\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}\,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha X.4 ... přitažlivá 3 body

Danka má dvě mosazné kuličky o průměru $2{,}00\,\mathrm{cm}$*, které jsou nabity stejnými náboji. Jedna z kuliček je upevněna a druhá kulička se ve vzdálenosti* $d_1 = 20{,}0\,\mathrm{cm}$ *vznáší nad tou první (uvažujme, že se může pohybovat pouze ve svislém směru). Pak jsou obě kuličky ponořeny do oleje o hustotě* $\rho_0 = 910\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$*, kde se ustálí nová rovnováha při vzájemné vzdálenosti kuliček* $d_2 = 14{,}0\,\mathrm{cm}$*. Jaká byla relativní permitivita použitého oleje? Hustotu mosazi uvažujte* $\rho = 8\,400\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$*. Vzdáleností kuliček je myšlena vzdálenost jejich středů.*

Danka si hrála s kuličkami.

Aby sme úlohu vyriešili, tak sa musíme pozrieť na to, aké sily pôsobia na hornú guličku. Vo vzduchu na ňu pôsobí tiažová sila, ktorá je kompenzovaná elektrostatickou silou, danou Coulombovým zákonom. Platí teda

$$V\rho g = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{d_1^2}\,,$$

kde $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3$ je objem jednej guličky, ε_0 je permitivita vákua a Q je veľkosť náboja na jednej guličke. V oleji na hornú guličku pôsobí okrem týchto dvoch síl aj nezanedbateľná hydrostatická vztlaková sila. Tam má podmienka rovnováhy tvar

$$V\rho g = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}}\frac{Q^2}{d_2^2} + V\rho_0 g\,,$$

kde ε_{r} je hľadaná relatívna permitivita oleja. Prvá a druhá podmienka rovnováhy nám dávajú dve rovnice o dvoch neznámych. Aby sme si zjednodušili výpočet, tak si z prvej podmienky rovno vyjadríme celý zlomok

$$\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\,,$$

a tento výraz dosadíme do druhej podmienky. Potom môžeme v novej rovnosti skrátiť viacero veličín a vyjadriť relatívnu permitivitu oleja ako

$$\varepsilon_{\mathrm{r}} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \frac{\rho}{\rho - \rho_0} \,.$$

Po dosadení číselných hodnôt dostávame, že relatívna permitivita použitého oleja bola $\varepsilon_{\mathrm{r}} \doteq 2{,}3$.

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: https://fykos.cz
e-mail: fykos@fykos.cz

FYKOS je také na Facebooku
http://www.facebook.com/FYKOS

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.