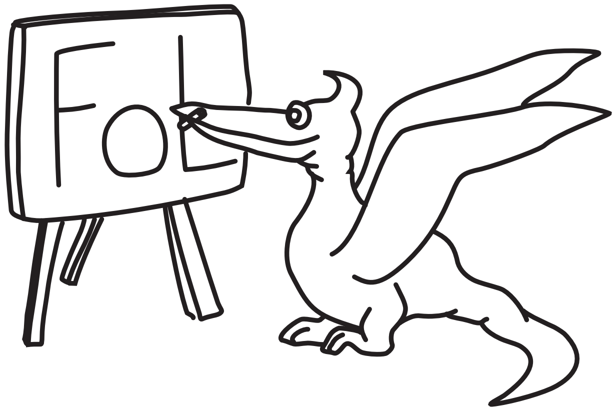
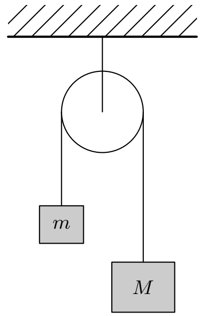
Řešení úloh 10. ročníku Fyziklání online



Úloha FoL.1 ... (snad už) jednoduché kladky 3 body



Mějme kladku a na laně zavěšená závaží dle obrázku. Předpokládejme, že lano i kladka jsou dokonalé a nehmotné, $M = 2{,}0\,\mathrm{kg}$ a $m = 1{,}0\,\mathrm{kg}$. Jaké bude zrychlení závaží M směrem dolů?

Lego chce zjistit, na jak jednoduchých kladkách pohoří polovina týmů...

Lano aj kladka sú nehmotné, takže sila, ktorou lano pôsobí na obe závažia je rovnaká. Označme si ju T. Môžeme teda zostaviť sústavu rovníc

$$a_1 M = Mg - T\,,$$
$$a_2 m = mg - T\,,$$

kde zrýchlenia sú orientované smerom nadol.

Odčítame od seba rovnice a zároveň si uvedomíme, že $a_1 = -a_2$, pretože lano je dokonalé, a teda sa nepredlžuje. Dostávame

$$a_1 = \frac{M-m}{M+m}g \doteq 3{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha FoL.2 ... dvě zapojení 3 body

Legolas našel hodně stejných rezistorů, které zapojil sériově. V takovém zapojení byl jejich celkový odpor $R_\mathrm{S} = 10{,}0\,\mathrm{k\Omega}$. Poté se Legolas rozhodl rezistory přepojit paralelně a naměřil odpor $R_\mathrm{P} = 1{,}00\,\Omega$. Jaký je odpor jednoho rezistoru? *Lego si udělal lego z rezistorů.*

Označme si hľadaný odpor jedného rezistora R a celkový počet rezistorov n. Potom dostávame rovnice

$$R_\mathrm{S} = nR\,,$$
$$R_\mathrm{P} = \frac{R}{n}\,.$$

Vynásobením týchto dvoch rovníc sa zbavíme n a zostane nám $R^2 = R_\mathrm{S}R_\mathrm{P}$, z čoho dostávame výsledok $R = \sqrt{R_\mathrm{S}R_\mathrm{P}} = 100\,\Omega$. Takýchto rezistorov potrebujeme $n = 100$.

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha FoL.3 ... kácíme stromy 3 body

Jehličnatý strom může být z mechanického hlediska aproximován kolmým (nikoli komolým) homogenním kuželem s výškou $h = 40\,\mathrm{m}$ a poloměrem podstavy $r = 1{,}0\,\mathrm{m}$. O jaký úhel můžeme vychýlit osu kužele od svislice, než strom vlastní vahou začne padat k zemi?

Dodo prokrastinoval na Youtube.

Teleso začne padať, keď sa jeho ťažisko dostane mimo podstavu. Ťažisko kužeľa sa nachádza vo výške $h/4$ nad zemou. Uhol, o ktorý sa môže strom vychýliť, je rovnaký ako uhol medzi zvislicou a spojnicou ťažiska a okraja podstavy. Jeho veľkosť určíme jednoducho ako $\operatorname{tg}\Phi = \frac{r}{h/4}$, teda $\Phi = \operatorname{arctg}\frac{4r}{h} \doteq 5{,}7^\circ$. Ak sa strom vychýli viac, samovoľne spadne.

Jozef Lipták
liptak.j@fykos.cz

Úloha FoL.4 ... nejbližší asteroid — 3 body

Dne 16. srpna 2020 byl zaznamenán asteroid (později označený 2020 QG), který prolétl (a byl zpozorován) doposud nejblíže Zemi bez toho, aby došlo ke srážce. V nejbližším místě se nacházel ve vzdálenosti pouhých $2\,950\,\mathrm{km}$ *nad zemským povrchem a letěl rychlostí* $v = 12{,}3\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. *Kolikrát byla rychlost asteroidu vyšší, než je úniková rychlost* v_{esc} *v této výšce nad Zemí? Jako odpověď chceme poměr* v/v_{esc}. *Karel udělal úlohu z novinky na webu astro.cz.*

Úniková rýchlosť je daná tým, že celková energia telesa v gravitačnom poli je nulová, teda

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = 0\,,$$

kde M je hmotnosť Zeme, G je gravitačná konštanta a v a r sú postupne rýchlosť telesa a jeho vzdialenosť od stredu Zeme. Vyjadrením rýchlosti dostávame vzťah pre únikovú rýchlosť

$$v_{\mathrm{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2GM}{R+h}}\,,$$

kde sme za r dosadili súčet polomeru Zeme a výšky telesa nad povrchom. Podielom dostávame

$$v/v_{\mathrm{esc}} = v\sqrt{\frac{R+h}{2GM}} \doteq 1{,}33\,.$$

Jozef Lipták
liptak.j@fykos.cz

Úloha FoL.5 ... nestabilní — 3 body

Mějme kvádr s rozměry $a = 20\,\mathrm{cm}$, $b = 30\,\mathrm{cm}$, $c = 50\,\mathrm{cm}$ *a hustotou* $\rho = 620\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. *Kvádr leží stěnou s rozměry a a c na podložce v homogenním gravitačním poli. Jaká je jeho stabilita při otáčení kolem hrany c? Stabilitou se myslí minimální množství energie, které je potřeba kvádru dodat, aby se převrhnul. Uvažujte* $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. *Dance padaly věci.*

Aby sa kváder prevrhol, stačí dostať jeho ťažisko nad hranu c a trochu za ňu. Táto zmena polohy ťažiska vyžaduje zvýšiť potenciálnu energiu kvádra. Tú môžeme počítať ako zmenu potenciálnej energie ťažiska. Položíme nulovú hladinu potenciálnej energie na úroveň podložky. Na začiatku má kváder potenciálnu energiu

$$E_{\mathrm{p}1} = \rho abcg\frac{b}{2}\,.$$

Keď sa jeho ťažisko bude nachádzať nad hranou c, bude vo výške h nad podložkou, pričom

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\,.$$

Vtedy bude mať potenciálnu energiu

$$E_{\mathrm{p}2} = \rho abcgh\,.$$

Stabilita je rozdiel týchto dvoch energií, a tak dostávame

$$\Delta E = E_{\mathrm{p}2} - E_{\mathrm{p}1} = \Delta E = \frac{1}{2}\rho abcg\left(\sqrt{a^2+b^2} - b\right) \doteq 5{,}5\,\mathrm{J}\,.$$

Stabilita kvádra je teda 5,5 J.

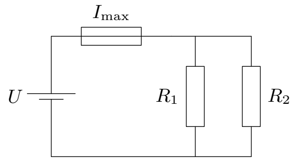
Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Úloha FoL.6 ... poistný výkon

3 body

Na svorky baterie je přes pojistku s maximálním přípustným proudem $I_{\mathrm{max}} = 500\,\mathrm{mA}$ připojena paralelní dvojice spotřebičů s odpory $R_1 = 500\,\Omega$ a $R_2 = 2\,000\,\Omega$. Jaký největší výkon můžeme z obvodu získat?

Dodo si musí dávať na koleji pozor.



Medzi napätím a prúdom platí Ohmov zákon $U = RI$, kde R je celkový odpor zapojených spotrebičov. Celkový odpor spotrebičov je pre paralelne zapojené spotrebiče daný ako

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 400\,\Omega\,.$$

Výkon spotrebičov určíme z napätia na nich a prúdu, ktorý nimi tečie, ako $P = UI = RI^2$. Pre maximálny výkon musí spotrebičmi tiecť čo najväčší prúd, teda maximálne prúd prepálenia poistky. Dosadením dostávame výkon $P = 100\,\mathrm{W}$.

Jozef Lipták
liptak.j@fykos.cz

Úloha FoL.7 ... princ inkoustové krve 3 body

Když Harry Potter zlobil, profesorka Umbridgeová ho potrestala tím, že jej nechala psát jeho vlastní krví. K zapsání malého písmena je potřeba průměrně 1,21 µl *krve. Školní řád má* 259 *normostran, z nichž každá obsahuje v průměru* 1 488 *písmen. Každé třicáté sedmé je však velké, takže se na něj spotřebuje třikrát více krve než na normální. Má-li Harry* 5 l *krve, kolik kopií řádu z něj bude možné vyrobit?* *Jáchymovi přišla celá knižní série značně nelogická.*

Na každých 37 písmen ze školního řádu spotřebujeme tolik krve, jako kdybychom napsali 39 malých písmen. Označme tento poměr $k = 39/37$. Ostatní veličiny ze zadání označíme popořadě V_p, n_s, n_p a V_H. Objem krve potřebný na napsání jedné kopie řádu bude

$$V_\mathrm{k} = n_\mathrm{s} n_\mathrm{p} k V_\mathrm{p}\,.$$

Výsledný počet knih spočítáme jako

$$n_\mathrm{k} = \frac{V_\mathrm{H}}{n_\mathrm{s} n_\mathrm{p} k V_\mathrm{p}} \doteq 10{,}2\,.$$

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha FoL.8 ... zpomalený vlak 4 body

Při příjezdu do stanice začne vlak rovnoměrně zpomalovat. Jeho brzdná dráha je $s = 75\,\mathrm{m}$ *a během předposlední sekundy před zastavením urazí vzdálenost* $l = 2{,}25\,\mathrm{m}$. *Jaká byla jeho počáteční rychlost* v_0 *před začátkem brzdění?* *Verča využila zpoždění k vymýšlení úloh.*

Vlak se pohybuje rovnoměrně zpomaleným pohybem a během předposlední sekundy urazí stejnou vzdálenost jako během druhé sekundy při zrychlování se stejným zrychlením. Pro větší názornost řešení si označíme počáteční a koncový čas předposlední, resp. druhé sekundy popořadě jako t_1 a t_2. Úsek l potom můžeme zapsat jako

$$l = \frac{1}{2} a t_2^2 - \frac{1}{2} a t_1^2 = \frac{1}{2} a \left(t_2^2 - t_1^2\right)\,.$$

Vyjádřením z této rovnice dostáváme zrychlení vlaku

$$a = \frac{2l}{t_2^2 - t_1^2}\,,$$

které později dosadíme do vzorce pro celkovou uraženou dráhu

$$s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a}\,.$$

Odtud už získáme hledanou původní rychlost jako

$$v_0 = \sqrt{2as} = \sqrt{\frac{4ls}{t_2^2 - t_1^2}}\,,$$

přičemž po dosazení dostáváme hodnotu $v_0 = 15\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Veronika Hendrychová
vercah@fykos.cz

Úloha FoL.9 ... čerpáme olej 4 body

Jaká bude účinnost čerpadla, pokud jím po připojení k efektivnímu síťovému napětí $U = 230\,\mathrm{V}$ *poteče elektrický proud o efektivní hodnotě* $I = 125\,\mathrm{mA}$*? Toto čerpadlo čerpá olej o hustotě* $\rho = 870\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ *přes tlakový rozdíl* $\Delta p = 120\,\mathrm{hPa}$ *s objemovým průtokem* $Q = 0{,}83\,\mathrm{ml{\cdot}s^{-1}}$*.*

Dodo si chtěl pořídit rotační vývěvu.

Účinnosť η je definovaná ako podiel vykonanej užitočnej práce (v našom prípade mechanickej práce oproti tlakovej sile) k dodanej práci (elektromotorickej sily). Za čas t dodá elektrická sieť čerpadlu energiu o veľkosti

$$W_1 = UIt\,.$$

Tú čerpadlo využije na pretlačenie kvapaliny cez daný tlakový rozdiel, čím vykoná prácu danú súčinom tlakovej sily F_p a dráhy s, na ktorej táto sila pôsobila

$$W_2 = F_p s = S\Delta p s = \Delta p V\,,$$

kde S je prierez čerpadla. Dráha s je vlastne dĺžka úseku tekutiny, ktorá cez čerpadlo za čas t pretiekla, teda $V = sS$ je pretečený objem. Po dosadení týchto prác dostávame pre účinnosť

$$\eta = \frac{\Delta p V}{UIt} = \frac{\Delta p Q}{UI} \doteq 0{,}000\,35\,,$$

kde sme ešte využili vzťah pre prietok $V = Qt$. Úloha sa v druhej časti taktiež dá riešiť pomocou rozmerovej analýzy.

V tejto úlohe sme spravili pri dosádzaní numerickú chybu. Rozhodli sme sa, že nejférovejšie riešenie voči všetkým týmom je, že nikomu nebudeme počítať žiadne získané ani stratené body za túto úlohu. Ospravedlňujeme se vám za spôsobené neprijemnosti.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha FoL.10 ... homogenní vzduch 4 body

Z pohledu klasické optiky je jakákoli látka homogenní. My ale dnes víme, že se skládá z částic. Určete, kolik částic (molekul) vzduchu se za standardních podmínek nachází v krychli se stranou délky odpovídající vlnové délce žluté D čáry sodíku.

Dodo zase nemohl usnout.

Vlnová dĺžka čiary D je približne $\lambda = 590\,\mathrm{nm}$. Určme najprv hmotnosť vzduchu obsiahnutého v našej kocke

$$m = \rho V = \rho \lambda^3\,,$$

kde $\rho = 1{,}29\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ je hustota vzduchu. Počet častíc určíme pomocou strednej molárnej hmotnosti vzduchu $M_\mathrm{m} = 29{,}0\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$ a Avogadrovho čísla $N_\mathrm{A} = 6{,}022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$ ako

$$N = \frac{mN_\mathrm{A}}{M_\mathrm{m}} = \frac{\rho\lambda^3 N_\mathrm{A}}{M_\mathrm{m}} \doteq 5\ 500\ 000\,.$$

V kocke so stranou o dĺžke zodpovedajúcej vlnovej dĺžke sodíkovej čiary sa teda nachádzajú milióny molekúl.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha FoL.11 ... naše staré hodiny 4 body

Naše staré hodiny jsou na baterku, její kapacita je $E = 1{,}2\,\mathrm{Wh}$. Hodinová ručička má délku $r_\mathrm{h} = 5\,\mathrm{cm}$ a minutová $r_\mathrm{m} = 8\,\mathrm{cm}$. Materiál dává ručičkám délkovou hustotu $\tau = 10\,\mathrm{g{\cdot}m^{-1}}$. Účinnost hodinového strojku je $\eta = 7\,\%$. Za jak dlouho se hodiny zastaví? Ručičky se otáčí plynule a při klesání je veškerá potenciální energie ztracena.

Michal přišel pozdě kvůli zpožděným hodinám.

Keď sa ručičky otáčajú rovnomerne, strojček ich nemusí nijako urýchľovať, len pri ceste smerom nahor musí kompenzovať gravitačnú silu. Prácu, ktorú vykoná strojček pri jednom obehu ručičky, teda môžeme spočítať ako rozdiel potenciálnej energie ručičky v najnižšej a najvyššej polohe. Konkrétne pre minutovú ručičku platí

$$\Delta E_\mathrm{m} = mg\Delta h = r_\mathrm{m}\tau g\left(\frac{r_\mathrm{m}}{2} - \frac{-r_\mathrm{m}}{2}\right) = r_\mathrm{m}^2\tau g\,.$$

Obdobne pre hodinovú ručičku máme

$$\Delta E_\mathrm{h} = r_\mathrm{h}^2\tau g\,.$$

Následne si v zadaní môžeme všimnúť, že sa tam nepíše o tom, na akom čase hodiny začínajú. Na tom teda zrejme nezáleží a môžeme tým pádom „rozložiť“ tie zmeny energie, akoby bol výkon hodín rovnomerný. Inými slovami

$$P = P_\mathrm{m} + P_\mathrm{h} = \frac{\Delta E_\mathrm{m}}{3\,600\,\mathrm{s}} + \frac{\Delta E_\mathrm{h}}{12\cdot 3\,600\,\mathrm{s}} \doteq 1{,}7\cdot 10^{-7}\mathrm{W} + 5{,}7\cdot 10^{-9}\mathrm{W} = 1{,}8\cdot 10^{-7}\mathrm{W}\,.$$

Potom už čas, ktorý to baterka vydrží, dostaneme ako

$$t = \frac{E\eta}{P} \doteq 47\cdot 10^4\mathrm{h}\,.$$

Vidíme, že skutočne neprekáža, že sme predpokladali, že výkon hodín je rovnomerný, nakoľko rozdiely vo výkone opakujúce sa s periódou 12 h nemajú ako ovplyvniť výsledok v takomto ráde. Vidíme teda že aj pri veľmi malej účinnosti by hodinky vydržať bežať cez 50 rokov.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha FoL.12 ... ech ech 4 body

Ve světě se rozšířil smrtelný virus, který má poměrně dlouhou inkubační dobu a už nakazil jednu desetitisícinu celé populace. Pilným vědeckým pracovníkům se zatím nepodařilo vyvinout lék, ale vyvinuli test, kterým lze zjistit, zda je daná osoba nakažená, či nikoli. Tento test dává pozitivní výsledek u 99,99 % nakažených osob. Zároveň dává falešný pozitivní výsledek u 0,03 % zdravých osob. Zdá se tedy, že je to docela spolehlivý test. Zcela náhodně jsme vybrali jednoho člověka a takto jej otestovali. Výsledek jeho testu je pozitivní. Jaká je pravděpodobnost, že je tento člověk nakažen?

Matějovi nebylo dobře na cviku ze statistické fyziky.

Pravděpodobnost, že je náhodný člověk nakažen, označme $p_\mathrm{N} = 0{,}000\,1$, pravděpodobnost, že je zdravý, $p_\mathrm{Z} = 0{,}999\,9$. Dále označme jako $p_\mathrm{NN} = 0{,}999\,9$ pravděpodobnost, že nakažený člověk bude mít pozitivní test, a pravděpodobnost, že bude mít pozitivní test zdravý člověk, jako $p_\mathrm{ZN} = 0{,}000\,3$.

Hledanou pravděpodobnost vypočteme jakožto poměr všech případů, kdy je nakažený člověk správně otestován (to vyjádříme jako součin $p_\mathrm{N} p_\mathrm{NN}$), ku počtu všech případů, kdy test dopadne pozitivně, tedy spočteme výraz

$$\frac{p_\mathrm{N} p_\mathrm{NN}}{p_\mathrm{N} p_\mathrm{NN} + p_\mathrm{Z} p_\mathrm{ZN}} = \frac{1}{4}\,.$$

Naproti tomu, že se test zdál být docela spolehlivý, dostáváme výsledek, že člověk s pozitivním testem má jen 25 % pravděpodobnost, že je nakažen. Takže se ještě vůbec nemusí vzdávat naděje…

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha FoL.13 ... nerovnoměrné osvětlení — 4 body

Danka seděla u kruhového stolu s poloměrem $R = 1{,}0\,\mathrm{m}$ a všimla si, že okraj stolu je mnohem méně osvětlený než střed. Jaký je rozdíl v osvětlení středu a okraje stolu, když jediný zdroj světla v místnosti je žárovka se svítivostí $I = 120\,\mathrm{cd}$ visící $h = 1{,}5\,\mathrm{m}$ nad středem stolu svítící do všech směrů stejně? Strop je černý. *Danka neviděla na knihy.*

Osvetlenie alebo intenzita osvetlenia E je fotometrická veličina definovaná ako svetelný tok dopadajúci na jednotku plochy. Ak máme bodový zdroj svetla so svietivosťou I, ktorého vzdialenosť od osvetľovanej plochy je r, potom intenzitu osvetlenia tejto plochy spočítame ako

$$E = \frac{I}{r^2}\cos\alpha\,,$$

kde α je uhol medzi normálou plochy a smerom dopadajúcich lúčov. V prípade výpočtu osvetlenia stredu stola dopadajú svetelné lúče na plochu kolmo, teda $\cos\alpha = 1$. Pri dopade lúčov na okraj stola platí pre uhol α

$$\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}\,.$$

Okraj stola je od žiarovky vzdialený

$$l = \sqrt{R^2 + h^2}\,.$$

Potom rozdiel intenzity osvetlenia medzi stredom a okrajom stola spočítame ako

$$\delta E = \frac{I}{h^2} - \frac{I}{R^2 + h^2}\frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}\,,$$

$$\delta E = I\left(\frac{1}{h^2} - \frac{h}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \doteq 22{,}6\,\mathrm{lx}\,.$$

Rozdiel v osvetlení stredu a okraja stola je približne 22,6 lx.

Daniela Pittnerová
`daniela@fykos.cz`

Úloha FoL.14 ... podzim ve vlaku 4 body

Vlak stoupá po namrzlé trati do kopce. Nejstrmější úsek tratě, po kterém je schopný stoupat, má sklon $\alpha = 1{,}75^\circ$. Po překonání převýšení vlak dorazí do stanice, jejíž koleje jsou vodorovné, ale taktéž namrzlé. Na jaké nejkratší vzdálenosti dokáže vlak zastavit z rychlosti $v = 52\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$?

Dodo čekal na vlak.

Pri stúpaní je nutné splniť podmienku statického trenia $F_\mathrm{t} \leq fF_\mathrm{n}$. Ak na vlak pôsobí len tiažová sila F_G, dostávame pre zložky $F_\mathrm{t} = F_\mathrm{G}\sin\alpha$, resp. $F_\mathrm{n} = F_\mathrm{G}\cos\alpha$, čo nám zviaže sklon svahu a koeficient trenia známym vzťahom $\mathrm{tg}\,\alpha \leq f$.

V prípade brzdenia zrýchlením a je najvyššia prípustná trecia sila pred prekĺznutím kolies daná obdobnou podmienkou, kde $F_\mathrm{n} = F_\mathrm{G}$ a $F_\mathrm{t} = ma$, keďže práve trecia sila brzdí pohyb. Využitím podmienky na začiatku riešenia dostávame $a \leq fg$, kde g je tiažové zrýchlenie. Na najkratšej možnej dráhe vlak zastane použitím najväčšieho možného zrýchlenia $a = fg = g\,\mathrm{tg}\,\alpha$, pričom zastane na dráhe

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{v^2}{2a} = \frac{v^2}{2g\,\mathrm{tg}\,\alpha} \doteq 348\,\mathrm{m}\,.$$

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha FoL.15 ... síla vodopádu 4 body

Vodopád o výšce $h = 30\,\mathrm{m}$ má průtok $Q = 1{,}2\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}$. Jakou celkovou silou působí voda na dno pod vodopádem? Voda po dopadu rychle odtéká a hloubka pod vodopádem je zanedbatelná.

Dodo vzpomíná na Plitvice.

Pri riešení využijeme Newtonov zákon sily vo všeobecnom tvare známy aj ako prvá impulzová veta

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\,,$$

ktorá hovorí, že sila je daná zmenou hybnosti za čas. Za čas $\mathrm{d}t$ dno spomalí padajúcu vodu s hmotnosťou $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V = \rho Q\,\mathrm{d}t$ z rýchlosti dopadu v na nulovú rýchlosť. Rýchlosť dopadu určíme z porovnania kinetickej a potenciálnej energie telesa v homogénnom gravitačnom poli

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2\,, \quad v = \sqrt{2gh}\,,$$

kde g je tiažové zrýchlenie. Po dosadení dostávame silu

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{v\,\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{v\rho Q\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \rho Q\sqrt{2hg} \doteq 29\,\mathrm{kN}\,.$$

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha FoL.16 ... spalujeme uhlí 4 body

V uzavřené nádobě o objemu $V = 20\,\mathrm{l}$ naplněné vzduchem spálíme $m = 213\,\mathrm{mg}$ čistého uhlíku. Po vyrovnání teploty v nádobě s okolím v ní změříme tlak. Kolikrát bude tento tlak vyšší v porovnání s tlakem před spálením? *Dodo chtěl být trochu zákeřný.*

Pri horení uhlíku v prostredí s dostatkom kyslíka prebieha chemická reakcia podľa rovnice

$$C + O_2 \longrightarrow CO_2\,.$$

Keďže uhlík je pevná látka, dochádza k premene jedného molu plynu na jeden mol iného plynu. Ak predpokladáme, že ide o ideálny plyn, pred reakciou a aj po dosiahnutí rovnovnováhy musí platiť stavová rovnica ideálneho plynu

$$pV = nRT\,,$$

kde sa nezmenil ani objem V, ani teplota T v rovnováhe s okolím, ani látkové množstvo n. Preto sa nemohol zmeniť ani tlak. Odpoveď na otázku v zadaní je teda $p/p_0 = 1$. Mali by sme ešte overiť, či je v nádobe dostatočné množstvo kyslíka. Pri izbových podmienkach zaberá mol plynu asi $24\,\mathrm{l}$, preto je v nádobe asi $0{,}2\,\mathrm{mol}$ molekúl kyslíka. Nami spaľovanému uhlíku zodpovedá látkové množstvo $n = m/M_m \approx 0{,}02\,\mathrm{mol}$. Nachádza sa teda v dostatočnom prebytku vzduchu.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha FoL.17 ... tepla a skupenství 4 body

Kolikrát větší teplo musíme dodat ledu na to, aby se vyvařil, ve srovnání s tím, když bychom ho chtěli jenom nechat roztát? Led, o který se zajímáme, vytahujeme z mrazáku o teplotě $t = -18\,^\circ\mathrm{C}$ při běžném atmosférickém tlaku. Soustředíme se na stavy, kdy led právě roztál na vodu o teplotě $0\,^\circ\mathrm{C}$ a poté kdy se veškerá tato voda přeměnila na páru teploty $100\,^\circ\mathrm{C}$.
Karel přemýšlel nad tím, jak se dá opařit nad rychlovarnou konvicí.

Rozdělme děje na čtyři části. Označme Q_1 teplo potřebné pro ohřátí ledu na $0\,^\circ\mathrm{C}$ (o $\Delta t_1 = 18\,^\circ\mathrm{C}$). Pro jeho výpočet použijeme rovnici $Q_1 = mc_0\Delta t_1$, kde m je hmotnost ledu a kde jako měrnou tepelnou kapacitu použijeme tu pro led.

Dále Q_2 je teplo potřebné pro přeměnu ledu na vodu při $0\,^\circ\mathrm{C}$. Vypočítáme ho podle vzorce $Q_2 = ml_1$, kde použijeme měrné skupenské teplo tání (koneckonců se o tání jedná).

Teplo potřebné pro ohřátí vody z $0\,^\circ\mathrm{C}$ na $100\,^\circ\mathrm{C}$ (o $\Delta t_2 = 100\,^\circ\mathrm{C}$) označíme Q_3. Pro jeho výpočet použijeme analogickou rovnici jako pro Q_1 čili $Q_3 = mc\Delta t_2$. Zde jsme ale použili měrnou tepelnou kapacitu vody a jiný rozdíl teplot.

Nakonec Q_4 bude teplo potřebné pro přeměnu vody na vodní páru při $100\,^\circ\mathrm{C}$. Výpočet je analogický výpočtu Q_2, opět ale použijeme jiné měrné skupenské teplo, tentokrát vypařování (přecijen při tomto ději o vypařování jde). Rovnice je tedy tvaru $Q_4 = ml_2$.

Když se nyní zadíváme na děje pozorně, zjistíme, že $Q_\mathrm{v} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$ a že $Q_\mathrm{t} = Q_1 + Q_2$. Celkově po vykrácení m máme

$$\frac{Q_\mathrm{v}}{Q_\mathrm{t}} = \frac{c_0\Delta t_1 + l_1 + c\Delta t_2 + l_2}{c_0\Delta t_1 + l_1}\,.$$

Po dosazení zjišťujeme, že na vyvaření ledu musíme dodat 8,21-krát více tepla než na jeho zkapalnění.

Kateřina Fatková
katka@fykos.cz

Úloha FoL.18 ... vaříme 4 body

Danka dala vařit vodu s teplotou $T_0 = 25\,^\circ\mathrm{C}$ a objemem $V = 1{,}5\,\mathrm{l}$ do hrnce o stejné teplotě na plotnu s příkonem $P = 1\,200\,\mathrm{W}$. Účinnost ohřevu vody s hrncem (kolik tepla se předá hrnci s vodou) je $\eta = 0{,}69$ a tepelná kapacita hrnce je $C = 500\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}}$. Jak dlouho musí Danka čekat, než se voda začne vařit? Potřebné konstanty si najděte v tabulkách.

Danka musela dlouho čekat při vaření.

Nech je hustota vody $\rho = 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, merná tepelná kapacita vody $c_\mathrm{v} = 4\,180\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$ a $T_\mathrm{v} = 100\,^\circ\mathrm{C}$ teplota varu vody. Teplo Q, ktoré musíme dodať sústave hrniec a voda na uvedenie vody do varu, je rovné

$$Q = V\rho c_\mathrm{v}\left(T_\mathrm{v} - T_0\right) + C\left(T_\mathrm{v} - T_0\right) .$$

Toto teplo je dodané platňou za čas t a platí

$$Q = \eta P t\,.$$

Teda

$$\eta P t = \left(T_\mathrm{v} - T_0\right)\left(V\rho c_\mathrm{v} + C\right) .$$

Odtiaľ vyjadríme čas

$$t = \frac{\left(T_\mathrm{v} - T_0\right)\left(V\rho c_\mathrm{v} + C\right)}{\eta P} \doteq 613\,\mathrm{s} \approx 10\,\mathrm{min}\,.$$

Danka bude čakať na zovretie vody približne 10 minút.

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Úloha FoL.19 ... vnitřní odpor 4 body

Připojíme-li k neideálnímu zdroji stejnosměrného elektrického napětí dva sériově spojené shodné rezistory, je účinnost tohoto zdroje 0,87. Určete jeho účinnost (jako podíl výkonu na připojené zátěži k celkovému výkonu), jestliže spojení rezistorů změníme na paralelní. Zkoumaný zdroj idealizujeme jako tvrdý zdroj napětí se sériově zapojeným vnitřním odporem.

Matěj chtěl na něčem ušetřit – tak zkusil elektřinu.

Účinnost zdroje vypočítáme jako podíl celkového výkonu ku výkonu na připojených rezistorech. Pro výkon použijeme vztah $P = RI^2$, kde I je proud procházející rezistorem o odporu R. Označíme-li R_i vnitřní odpor zdroje a R celkový odpor dvou sériově spojených rezistorů, pak pro účinnost při sériovém spojení platí

$$\eta_1 = \frac{RI^2}{(R + R_\mathrm{i})I^2} = \frac{R}{R + R_\mathrm{i}}\,,$$

kde jsme využili faktu, že při sériovém zapojení je proud všude stejný. Z rovnice plyne

$$R_\mathrm{i} = R\frac{1-\eta_1}{\eta_1}\,.$$

Paralelní zapojení dvou rezistorů můžeme nahradit jedním rezistorem o polovičním odporu. Tj. dva stejné paralelně zapojené rezistory mají čtyřikrát menší odpor, než při sériovém zapojení. Pro účinnost při paralelním spojení rezistorů pak dostaneme

$$\eta_2 = \frac{\frac{R}{4}I^2}{\left(\frac{R}{4}+R_\mathrm{i}\right)I^2} = \frac{\frac{R}{4}}{\frac{R}{4}+R_\mathrm{i}} = \frac{R}{R+4R_\mathrm{i}} = \frac{R}{R+4R\frac{1-\eta_1}{\eta_1}} = \frac{\eta_1}{4-3\eta_1} \doteq 0{,}626\,,$$

kde jsme dosadili vztah pro R_i.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha FoL.20 ... voroplavba

4 body

Vor se skládá z dvanácti dřevěných válcových klád dlouhých $l = 8{,}00\,\mathrm{m}$*, z nichž každá má poloměr* $r = 12{,}0\,\mathrm{cm}$*. S nákladem o hmotnosti* $m = 70\,\mathrm{kg}$ *plave vor na vodě tak, že klády přečnívají o* $s = 3{,}0\,\mathrm{cm}$ *nad hladinu. Jaká je hustota použitého dřeva?*

Jarda přemýšlel, jak vylepšit výlet na vodu.

Tiaž celej plte (voru) aj s nákladom musí vyrovnať vztlaková sila daná podľa Archimedovho zákona ako tiaž vody vytlačenej ponorenou časťou telesa

$$F_\mathrm{vz} = V_\mathrm{p}\rho_0 g\,,$$

kde ρ_0 je hustota vody, g tiažové zrýchlenie a V_p objem ponorenej časti plte. Pre tiažovú silu máme s použitím vzťahu pre objem valca

$$F_G = mg + V\rho g = mg + 12\pi r^2 l\rho g\,,$$

kde ρ je hustota dreva. Zostáva vyjadriť objem ponorenej časti plte. Z geometrického hľadiska ide o súbor dvanástich telies, ktoré vznikli zrezaním valca kolmo na jeho podstavu. Podstavu každého takého telesa tvorí kruhová úseč s plochou S. Túto plochu môžeme zo zadaných veličín vyjadriť pomocou MF tabuliek ako

$$S = r^2\arccos\frac{r-h}{r} - (r-h)\sqrt{2hr-h^2}\,,$$

kde $h = 2r - s$. Po dosadení dostávame objem ponorenej časti ako $V_\mathrm{p} = 12Sl \doteq 4{,}03\,\mathrm{m^3}$.

Ak porovnáme hore uvedené sily a vyjadríme hustotu dreva, dostaneme

$$\rho = \frac{\rho_0 V_\mathrm{p} - m}{12\pi r^2 l} \doteq 910\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}\,.$$

Ide teda o drevo s pomerne vysokou hustotou, avšak aj napriek tomu na ňom dokážeme plávať s pomerne veľkou rezervou. Na unesenie jedného človeka by dokonca za daných podmienok stačila jediná klada s hustotou $\rho \doteq 730\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha FoL.21 ... záhadná kulička 4 body

Na nehmotné pružince máme zavěšenou kuličku neznámé hmotnosti a složení o poloměru $r = 2{,}0\,\mathrm{cm}$. Při ponoření do vody o hustotě $\rho = 1\,000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ se prodloužení pružinky zmenší na 80% své hodnoty před ponořením. Jaká je hmotnost kuličky?

Verča vzpomínala na experimenty na střední.

Rozdíl v prodloužení pružinky je způsobený vztlakovou silou působící na kuličku ve vodě. Působící síly můžeme zapsat jako

$$0{,}8F_G = F_G - F_{\mathrm{vz}}\,,$$

kde F_G je tíhová síla a F_{vz} síla vztlaková. Teď už jen zbývá síly rozepsat podle vzorce a vyjádřit hmotnost m jako

$$0{,}8mg = mg - V\rho g\,,$$

$$m = \frac{20}{3}\pi r^3\rho\,.$$

Po dosazení hodnot vychází hmotnost kuličky zhruba $m \doteq 168\,\mathrm{g}$.

Veronika Hendrychová
vercah@fykos.cz

Úloha FoL.22 ... osvětlená 5 bodů

Danka seděla ve vlaku budoucnosti, který jel konstantní rychlostí $v = 1{,}0\cdot10^5\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Trať vlaku byla kolmá na dlouhou přímou silnici, podél níž byly lampy ve vzájemné vzdálenosti $l = 5{,}0\,\mathrm{m}$. Danka projela křižovatkou kolejí a silnice. V soustavě spojené s krajinou se všechny lampy najednou rozsvítily, když se vlak nacházel ve vzdálenosti $d_0 = 2{,}0\,\mathrm{km}$ od křižovatky. Označme indexem 0 lampu přímo na křižovatce. Jaký čas uplyne Dance mezi tím, než uvidí rozsvítit sa lampu s indexem 100 od doby, kdy k ní dorazilo světlo z lampy s indexem 0? Uvažujte přesnou rychlost světla.

Danka cestovala vlakem.

K Danke doletí svetlo z lampy s indexom 0 za čas t_0. Danka bude v tej chvíli vo vzdialenosti $d_0 + vt_0$ od križovatky. Pre čas t_0 potom platí

$$t_0 = \frac{d_0}{c - v}\,.$$

Označme t_{100} dobu, za ktorú doletí svetlo z lampy s indexom 100 k Danke a r vzdialenosť lampy od miesta, v ktorom sa bude Danka nachádzať v čase t_{100}. Platí

$$r = \sqrt{n^2l^2 + (d_0 + vt_{100})^2}\,,$$

kde $n = 100$. Potom

$$t_{100} = \frac{r}{c} = \frac{\sqrt{n^2l^2 + (d_0 + vt_{100})^2}}{c}\,.$$

Túto rovnicu upravíme na kvadratickú rovnicu pre t_{100}, ktorej riešenie je

$$t_{100} = \frac{vd_0 \pm \sqrt{c^2{d_0}^2 + (c^2 - v^2)\,n^2l^2}}{c^2 - v^2}\,.$$

Fyzikálne správne je riešenie s kladným znamienkom. Ďalej spočítame rozdiel $\Delta t = t_{100} - t_0$ a dostávame $\Delta t = 2{,}06 \cdot 10^{-7}$ s. Tento časový rozdiel je ale spojený s krajinou, voči ktorej sa Danka pohybuje. Čas musíme transformovať do sústavy spojenej s vlakom (označíme čiarkou), v ktorej sa Danka nepohybuje a jej vlastný čas je tak rovný súradnicovému času t'. Vyjdeme z opačného transformačného vzťahu $t' \rightarrow t$

$$t = \gamma \left(\frac{v}{c^2} x' + t' \right) ,$$

kde v je vzájomná rýchlosť sústav, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ a keďže v sústave spojenej s vlakom je Danka na konštantnej súradnici x', dostávame pre rozdiel časov

$$\Delta t' = \frac{1}{\gamma} \Delta t \doteq 1{,}94 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}\,.$$

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Úloha FoL.23 ... klubíčko

5 bodů

Anička si hraje s klubíčkem ve tvaru koule o poloměru $R = 5\,\mathrm{cm}$, které je tvořeno provázkem o délce $l = 100\,\mathrm{m}$. Anička stojí na nakloněné rovině se sklonem $\alpha = 3^\circ$. Kopne do klubíčka přímo proti svahu, ale konec provázku klubíčka je v počátečním místě zaseklý, a tak se klubíčko při svém valení rozmotává, dokud se nerozmotá úplně. Nakonec zůstane na svahu ležet pouze rovný provázek. Jakou minimální počáteční rychlost muselo klubíčko mít?

Matěj si četl dětskou knížku.

Vyjdeme ze zákona zachování energie. Po rozmotání klubíčka je těžiště provázku přesně v polovině jeho délky, tedy ve výšce $\frac{l}{2} \sin\alpha$. Na počátku je těžiště klubíčka ve výšce $R\cos\alpha$. Změna potenciální energie je tedy $\Delta E = Mg\left(\frac{l}{2}\sin\alpha - R\cos\alpha\right)$. Označme rychlost kopnutí v. Na počátku má klubíčko translační kinetickou energii $\frac{1}{2}Mv^2$ a rotační kinetickou energii $\frac{1}{2}J\frac{v^2}{R^2}$, kde $J = \frac{2}{5}MR^2$. Dostáváme

$$\Delta E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{5}Mv^2 = \frac{7}{10}Mv^2\,,$$
$$Mg\left(\frac{l}{2}\sin\alpha - R\cos\alpha\right) = \frac{7}{10}Mv^2\,,$$
$$v = \sqrt{\frac{5g}{7}\left(l\sin\alpha - 2R\cos\alpha\right)} \doteq 6{,}00\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha FoL.24 ... cestovatelská

5 bodů

Cestovatel potřebuje stihnout vlak a nemá na to moc času. Stanice je od něj vzdálená $s = 1\,000\,\mathrm{m}$, on ale stojí v poli, kterým se zvládne prodírat rychlostí jen $v_\mathrm{p} = 3{,}0\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Ke *stanici naštěstí vede silnice, po které zvládne klusat rychlostí* $v_\mathrm{s} = 7{,}0\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. *Silnice je od cestovatele vzdálená* $l = 600\,\mathrm{m}$. *Pod jakým úhlem* α *od kolmice se silnicí je pro cestovatele nejvýhodnější se vydat, aby na stanici dorazil co nejdříve?* *Verča jela na čundr.*

Nejprve vyjádříme dobu cesty v závislosti na úhlu α a ostatních parametrech jako

$$t = \frac{l}{v_\mathrm{p}\cos\alpha} + \frac{\sqrt{s^2 - l^2} - l\,\mathrm{tg}\,\alpha}{v_\mathrm{s}}\,.$$

Abychom dostali minimální čas, rovnici zderivujeme podle α a výraz položíme roven nule

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{l}{v_\mathrm{p}}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{l}{v_\mathrm{s}}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha} = 0\,.$$

Z toho už vyjádříme hledaný úhel jako $\alpha = \arcsin\left(v_\mathrm{p}/v_\mathrm{s}\right) \doteq 25{,}4^\circ$.

Veronika Hendrychová
`vercah@fykos.cz`

Úloha FoL.25 ... deskový kondenzátor jinak 5 bodů

Mějme kondenzátor tvořený čtvercovou vodivou deskou o ploše $S = 6{,}0\,\mathrm{cm^2}$ *a rovnoběžnou nekonečně velkou uzemněnou rovinnou vodivou deskou ve vzdálenosti* $d = 1{,}1\,\mathrm{mm}$. *Jaká je kapacita tohoto kondenzátoru, je-li definována jako podíl náboje na čtvercové desce a napětí mezi deskou a rovinou?*

Původně měl Vašek přichystaný kondenzátor s nekonečnou kapacitou.

Obě vodivé desky tvoří ekvipotenciální plochy, a jak je u uzemněného vodiče zvykem, volíme na něm elektrostatický potenciál φ nulový. Nechť je čtvercová deska nabita nábojem Q a je na ní elektrostatický potenciál φ_r. Hledáme-li elektrostatický potenciál v poloprostoru, který obsahuje čtvercovou desku a je ohraničen deskou nekonečnou (nazvěme ho pravý poloprostor), redukuje se problém na řešení Poissonovy rovnice

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

v daném poloprostoru s okrajovou podmínkou $\varphi = 0$ na nekonečné desce, kde ρ je nábojová hustota a ε_0 je permitivita vakua. Úlohy tohoto typu se často řeší *metodou zrcadlení*. Na nekonečnou desku budeme nahlížet jako na rovinu zrcadlení. Jestliže všechny náboje v pravém poloprostoru zobrazíme přes rovinu zrcadlení do levého poloprostoru a změníme jim znaménko, dostaneme novou elektrostatickou úlohu, jejíž řešení v pravém poloprostoru je shodné s řešením původní úlohy na pravém poloprostoru. Poznamenejme, že zrcadlení a změna znaménka náboje způsobí, že na rovině zrcadlení bude nulový náboj. To celkově způsobí, že nábojová hustota ρ je antisymetrická při zrcadlení přes rovinu zrcadlení. Z linearity Poissonovy rovnice (1) plyne, že existuje potenciál φ, který je antisymetrický při zrcadlení a stejně jako nábojová hustota ρ je nulový na rovině zrcadlení. Tím jsme si vysvětlili princip metody zrcadlení.

V našem konkrétním případě nám tato metoda dává elektrostatickou úlohu se dvěma identickými čtvercovými deskami ve vzájemné vzdálenosti $2d$, z nichž na jedné je potenciál φ_r a nese náboj Q, druhá má potenciál $-\varphi_r$ a její náboj je $-Q$. Tyto desky dohromady tvoří deskový kondenzátor, který má dvojnásobnou kapacitu oproti našemu původnímu kondenzátoru, neboť podle definice ze zadání má náš původní kondenzátor kapacitu

$$C = \frac{Q}{\varphi_r}$$

a náš myšlený deskový kondenzátor má kapacitu

$$C' = \frac{Q}{2\varphi_r} = \frac{C}{2} \,.$$

Vzhledem k tomu, že vzájemná vzdálenost desek v tomto deskovém kondenzátoru $2d$ je řádově menší než jejich charakteristický rozměr $\sqrt{S}$, můžeme kapacitu C' aproximovat přibližným vztahem

$$C' = \frac{\varepsilon_0 S}{2d} \,.$$

Kapacita kondenzátoru ze zadání je pak

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \,.$$

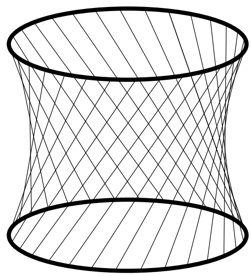
Po číselném dosazení hodnot ze zadání dostáváme $C \doteq 4{,}8\,\mathrm{pF}$.

Václav Mikeska
v.mikeska@fykos.cz

Úloha FoL.26 ... kmitající obruč 5 bodů

Mějme dvě stejné obruče s poloměrem $R = 1{,}0\,\mathrm{m}$, přičemž horní je pevně uchycena a spodní je k té horní přivázána několika nehmotnými lanky tak, že všechna jsou dlouhá $l = 2{,}0\,\mathrm{m}$ a visí svisle dolů. Nechť má spodní obruč hmotnost $m = 1{,}0\,\mathrm{kg}$. Když s ní trochu pootočíme, jakou bude mít periodu malých kmitů?

Lego upravil matematickou úlohu na fyzikální.



Ako je to vo fyzike takmer so všetkým, aj periódu malých kmitov možno vypočítať viacerými spôsobmi. Tu si ukážeme jeden z tých síce menej známych, ale veľmi efektívnych.

Postup spočíva v tom, že si vyjadríme energiu nášho systému ako súčet kinetickej a potenciálnej energie. Ako premennú, ktorá bude v týchto vzťahoch vystupovať, si zvolíme uhol pootočenia z rovnovážnej polohy φ.

Kinetická energia je jednoducho

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\varphi}^2 \,.$$

S potenciálnou energiou je to trochu zložitejšie. Ak je uhol φ dostatočne malý, môžeme predpokladať, že body, v ktorých sú lanká uchytené, sa posunuli oproti svojim pôvodným polohám o $R\varphi$. Z Pytagorovej vety potom dostávame novú vzdialenosť medzi obručami ako $\sqrt{l^2 - R^2\varphi^2}$. To za predpokladu, že $R\varphi \ll l$ môžeme upraviť ako

$$l\sqrt{1 - \left(\frac{R\varphi}{l}\right)^2} \approx l\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R\varphi}{l}\right)^2\right) = l - \frac{R^2\varphi^2}{2l} \,.$$

Čiže oproti svojej nevychýlenej polohe (l pod hornou obručou) sa spodná obruč zdvihla o

$$\Delta h = \frac{R^2\varphi^2}{2l}\,.$$

Zmena potenciálnej energie je potom

$$E_\mathrm{p} = mg\Delta h = \frac{1}{2}\frac{mgR^2}{l}\varphi^2\,.$$

Pripomeňme si, že pre lineárny harmonický oscilátor (hmotný bod na pružinke) je kinetická a potenciána energia daná ako

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\,,$$
$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kx^2\,.$$

Perióda kmitov je potom $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Zostáva si všimnúť, že nami odvodené vzťahy pre energiu nášho systému majú rovnaký tvar, ako tie pre LHO (jediný rozdiel je v tom, že ako premenná v nich vystupuje uhol a nie poloha, to však nie je problém). Označíme si teda výrazy stojace na mieste m a k ako m_ef resp. k_ef a dosadíme do vzťahu pre periódy malých kmitov. Dostávame

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_\mathrm{ef}}{k_\mathrm{ef}}} = 2\pi\sqrt{\frac{mR^2}{\frac{mgR^2}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \doteq 2{,}84\,\mathrm{s}\,.$$

Nežeby sa tento výsledok nedal odhadnúť rovno...

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha FoL.27 ... kmitavá

5 bodů

Mějme homogenní čtvercovou desku o délce strany 1 m. Vyvrtáme do ní dírku, za kterou ji pověsíme na hřebík ve zdi a necháme kmitat v rovině čtverce. V jaké vzdálenosti od středu desky se musí díra nacházet, aby frekvence malých kmitů byla co nejvyšší?

Matějovi zbyl kus plechu a nevěděl, co s ním.

Použijeme vzorec pro fyzické kyvadlo

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}\,,$$

kde m je v našem případě hmotnost desky, l je vzdálenost závěsu od těžiště a J je moment setrvačnosti čtverce vůči ose otáčení. Ten vypočítáme podle Steinerovy věty, neboť známe moment setrvačnosti čtverce vůči těžišti $J_0 = \frac{1}{6}ma^2$, kde a je strana čtverce. Pro hledaný moment vůči ose otáčení proto můžeme psát

$$J = J_0 + ml^2 = \frac{1}{6}ma^2 + ml^2\,.$$

Úhlová rychlost bude

$$\omega^2 = \frac{gl}{\frac{1}{6}a^2 + l^2}\,.$$

Derivaci tohoto výrazu podle l položíme rovnou nule. Příslušná rovnice má tvar

$$g\left(\frac{1}{6}a^2 + l^2\right) - 2gl^2 = 0\,,$$

odkud už získáváme výslednou vzdálenost

$$l = \frac{1}{\sqrt{6}}a \doteq 0{,}408\,\mathrm{m}\,.$$

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha FoL.28 ... lego kocky 1.0 — 4 body

Máme dva kvádříky položené na sobě, spodní má hmotnost $M = 2{,}0\,\mathrm{kg}$, vrchní $m = 1{,}0\,\mathrm{kg}$. Koeficient tření mezi spodním a podložkou je 0, koeficient statického tření mezi kvádříky je $f_\mathrm{s} = 0{,}50$, koeficient dynamického tření mezi kvádříky je $f_\mathrm{d} = 0{,}20$. Jak velkou silou ve vodorovném směru musíme působit na spodní kvádřík, aby zrychloval se zrychlením $a = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$?

Lego pomáhal kamarádce s fyzikou, tak si alespoň vzal nápady na úlohy.

Maximálna sila, akou je schopný spodný kváder pôsobiť na vrchný je $F_\mathrm{max} = mgf_\mathrm{s} \doteq 5\,\mathrm{N}$. Pri tejto sile by vrchný kváder zrýchľoval so zrýchlením $a_\mathrm{max} = F_\mathrm{max}/m \doteq 5\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, čo je menej než zadaním požadované zrýchlenie spodného kvádra. Takže sa po sebe určite budú šmýkať, a teda nás bude zaujímať dynamické trenie.

Veľkosť trecej sily, akou na seba budú kvádre pôsobiť, bude teda jednoducho $F_\mathrm{d} = mgf_\mathrm{d}$. Teda keď si označíme silu, ktorou na spodný kváder pôsobíme F, jeho výsledné zrýchlenie bude

$$a = \frac{F - mgf_\mathrm{d}}{M}\,.$$

Zostáva si vyjadriť $F = aM + mgf_\mathrm{d} \doteq 22\,\mathrm{N}$.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha FoL.29 ... lego kocky 2.0 — 5 bodů

Máme 2 kvádříky položené na sobě, spodní má hmotnost $M = 2{,}0\,\mathrm{kg}$, vrchní $m = 1{,}0\,\mathrm{kg}$. Koeficient tření mezi spodním a podložkou je 0, koeficient statického tření mezi kvádříky je $f_\mathrm{s} = 0{,}50$, koeficient dynamického tření mezi kvádříky je $f_\mathrm{d} = 0{,}20$. Jak velkou silou ve vodorovném směru musíme působit na spodní kvádřík, aby zrychloval se zrychlením $a = 1{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$?

Lego pomáhal kamarátke s fyzikou, tak si aspoň zobral nápady na úlohy.

Horný kváder zrejme nebude zrýchľovať viac než spodný, takže maximálne so zrýchlením a. Na to je potrebná sila $am = 1\,\mathrm{N}$.

Maximálna sila, akou je schopný spodný kváder pôsobiť na vrchný je $F_{\mathrm{max}} = mgf_{\mathrm{s}} \doteq 5\,\mathrm{N}$, čo je viac ako je potrebné, takže horný kváder bude tiež zrýchľovať so zrýchlením veľkosti a.

Teraz je jednou z možností odrátať silu, ktorou musí spodný kváder na ten horný pôsobiť, od sily, ktorou naň pôsobíme my. Alebo si stačí uvedomiť, že kvádre sa v tomto prípade budú správať ako jedno teleso, čiže platí

$$a = \frac{F}{M + m}\,.$$

Zostáva si vyjadriť $F = (M + m)\,a = 3{,}0\,\mathrm{N}$.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha FoL.30 ... nárazový urychlovač 5 bodů

Máme za sebou na přímce v klidu velmi velké množství hmotných bodů, přičemž první má hmotnost $M_0 = 1{,}0\,\mathrm{kg}$ a každý další má 70 % hmotnosti předchozího. Prvnímu udělíme kinetickou energii $E_0 = 50\,\mathrm{J}$ a míří směrem ke druhému. Body se naprosto elasticky srazí. Rychlost kterého hmotného bodu jako první přesáhne setinu rychlosti světla? Počítejte nerelativisticky.

Jarda chtěl vylepšit CERN.

Při dokonale elastických srážkách platí zákon zachování hybnosti

$$Mu = Mv_M + mv_m$$

a zákon zachování kinetické energie

$$\frac{1}{2}Mu^2 = \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}mv_m^2\,,$$

kde M je hmotnost težšího bodu, $m = 0{,}7M$ je hmotnost lehčího bodu, u je rychlost těžšího bodu před srážkou, v_M je jeho rychlost po srážce a v_m je rychlost lehčího bodu po srážce. Právě tuto rychlost z uvedených rovnic vyjádříme jako

$$v_m = \frac{2M}{M + m}u = \frac{2}{1{,}7}u\,.$$

Vidíme, že rychlost nějakého bodu po srážce je pouze násobkem rychlosti předchozího bodu. Po n srážkách je rychlost posledního (nejrychlejšího) bodu

$$v_{\mathrm{max}} = \left(\frac{2}{1{,}7}\right)^n u_0\,,$$

kde

$$u_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{M_0}} = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

je rychlost prvního bodu před první srážkou. Do rovnice dosadíme za rychlost v_{max} a vyjádříme n jako

$$n = \frac{\ln\left(\frac{0{,}01c}{u_0}\right)}{\ln\left(\frac{2}{1{,}7}\right)} \doteq 77{,}6\,.$$

Pro pořadové číslo bodu, který jako první přesáhne setinu rychlosti světla, musíme n zaokrouhlit nahoru a přičíst k němu jedna (k n-tému bodu se dostaneme po $(n-1)$ srážkách), čímž dostaneme 79.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha FoL.31 ... naskoč! 5 bodů

Na zemi leží dostatečně velký kvádr s hmotností $M = 32{,}5\,\mathrm{kg}$. *Hodíme na něj menší kvádřík o hmotnosti* $m = 11{,}7\,\mathrm{kg}$ *tak, že při dopadu bude mít skoro nulovou vertikální složku rychlosti, zatímco ta horizontální bude* $v = 19{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. *Třecí koeficient mezi velkým kvádrem a zemí je* $f_1 = 0{,}13$, *mezi oběma kvádry je* $f_2 = 0{,}69$. *Jakou celkovou dráhu urazí velký kvádr?*

Jáchym přemýšlel, kde všude se dá přistát s letadlem.

Dokud se rychlost malého kvádru nevyrovná rychlosti spodního kvádru, jejíž velikost si v tomto okamžiku označíme jako v_1, bude na malý kvádr působit třecí síla $f_2 mg$. Čas, ve kterém k tomu dojde, bude t_1. Z velikosti této síly vyplývá zrychlení $a_2 = -f_2 g$.

Malý kvádr stejně velkou třecí silou působí na velký, na který dále působí ještě třecí síla mezi ním a zemí, jejíž velikost bude $f_1 (m + M) g$. Ta jej zpomaluje, zatímco síla od malého kvádru jej urychluje. Celkově tak na něj působí zrychlení

$$a_1 = \frac{f_2 mg - f_1 (m + M) g}{M}\,,$$

čili jeho rychlost v čase t_1 bude $v_1 = a_1 t_1$. Pro malý kvádr naopak platí $v_1 = v + a_2 t_1$; z této rovnosti si můžeme vyjádřit čas

$$t_1 = \frac{v}{a_1 - a_2} = \frac{Mv}{(f_2 - f_1)(m + M) g}\,.$$

Velký kvádr během něj urazí vzdálenost

$$x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2\,.$$

Po zbytek dráhy se oba kvádry pohybují jako jedno těleso, takže na ně působí zrychlení $a_3 = -f_1 g$. Z rychlosti v_1 zpomalí na nulu za čas

$$t_3 = -\frac{v_1}{a_3} = -\frac{a_1 t_1}{a_3}\,.$$

Přitom překoná vzdálenost

$$x_3 = v_1 t_3 + \frac{1}{2} a_3 t_3^2 = -\frac{1}{2} a_3 t_3^2 = -\frac{a_1^2 t_1^2}{2a_3}\,.$$

Celková uražená vzdálenost bude

$$x = x_1 + x_3 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 - \frac{a_1^2 t_1^2}{2a_3} = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \left(1 - \frac{a_1}{a_3}\right) = \\ = \frac{mv^2}{2g (m + M)} \frac{f_2 m - f_1 (m + M)}{f_1 (f_2 - f_1)(m + M)} \doteq 3{,}60\,\mathrm{m}\,.$$

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha FoL.32 ... odporný píst

5 bodů

V tepelně izolovaném válci o vnitřním průřezu $S = 500\,\mathrm{cm^2}$ *a výšce* $l = 50\,\mathrm{cm}$ *je rezistor s odporem* $R = 120\,\Omega$*. Ve válci je vzduch s teplotou* $T_0 = 20\,{}^\circ\mathrm{C}$ *a tlakem* $p_0 = 101\,\mathrm{kPa}$*, který je i v okolí válce. Do rezistoru pustíme proud* $I = 200\,\mathrm{mA}$*. Jedna podstava válce povolí, pokud na ni působí síla* $F = 500\,\mathrm{N}$*. Za jak dlouho tato podstava povolí?*

Jarda chtěl něco rozbít vzduchem.

Na to, aby podstava povolila, musí byť rozdiel tlakov

$$\Delta p = \frac{F}{S}\,.$$

Vonku aj vnútri je na začiatku tlak p_0. Tlak vnútri teda musí stúpnuť na $p_0 + \Delta p$, čiže $1 + \Delta p/p_0$ násobne. Keďže sa ide o izochorický dej, znamená to, že presne toľkokrát musí vzrásť teplota.

Rezistor zohrieva vzduch výkonom $P = I^2 R$. Ako sme už spomínali, bude ide o izochorický dej, a teda celá táto energia sa spotrebuje na zvýšenie vnútornej energie plynu. Teda

$$Q = \Delta U\,,$$
$$I^2 R t = m c_V \Delta T\,,$$

kde m je hmotnosť plynu, ktorý zahrievame, c_V je jeho merná tepelná kapacita pri stálom objeme, čo je pre vzduch približne $0{,}72\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$, a ΔT je rozdiel teplôt na konci a začiatku procesu. Spočítali sme si, že teplota musí vzrásť $1 + \Delta p/p_0$ násobne, čiže o $\Delta T = T_0 \Delta p/p_0$.

Zostáva určiť hmotnosť vzduchu zavretého vo valci. Keďže ten mal na začiatku atmosferický tlak a izbovú teplotu, stačí použiť $m = \rho V = \rho S l$, kde $\rho = 1{,}20\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Nič nám teda už nebráni vyjadriť si potrebný čas

$$t = \frac{\rho S l c_V T_0 F}{S p_0 I^2 R} = \frac{\rho l c_V T_0 F}{p_0 I^2 R} \doteq 130\,\mathrm{s}\,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha FoL.33 ... 4D drátěnka 5 bodů

Určete odpor mezi dvěma sousedními vrcholy čtyřdimenzionální drátěné krychle. Každá hrana této krychle má odpor $R = 1\,000\,\Omega$.

Karel se zamýšlel nad vícedimenzionálními rozpočtovými problémy.

4D kocku si môžeme predstaviť ako dve 3D kocky, ktorých príslušné vrcholy sú spojené. Dva susedné vrcholy 4D kocky sú teda napríklad aj dva vrcholy, ktoré susedia v 4D kocke, ale ležia v dvoch rôznych 3D kockách. Poďme si teda rozobrať, akými všetkými spôsobmi sa vie dostať prúd z jedného vrcholu (označíme si ho A) do druhého (Z).

Prvá možnosť je prirodzene po tej hrane, ktorá ich spája. Vtedy mu stojí v ceste odpor R. Táto možnosť je očividne paralelná k celému zvyšku.

Keď nejde prúd z A po hrane spájajúcej 3D kocky, musí ísť nutne po hrane 3D kocky až do nejakého bodu, ktorý v rámci tejto kocky susedí s A. Tieto body sú 3 a je zrejmé, že v našej úlohe úplne zameniteľné. Použijeme teda klasický trik a predstavíme si, že sú tieto body dokonale vodivo spojené (keďže týmito spojmi aj tak nič nepotečie), a označíme ich teda za jeden bod B. Z A do B sa teda vieme dostať tromi rôznymi rezistormi s odporom R, takže odpor medzi A a B zistíme z paralelného zapojenia (rátajme všeobecne pre n rovnakých paralelne zapojených vodičov)

$$\frac{1}{R_n} = n \cdot \frac{1}{R} \quad \Rightarrow \quad R_n = \frac{R}{n}\,.$$

Pre $n = 3$ dostávame odpor medzi A a B rovný $R/3$.

Potom v bode B má prúd opäť 2 možnosti prúdenia – po hranách spájajúcich 3D kocky do prislušného bodu druhej kocky, alebo „ďalej“ po aktuálnej kocke. V prvom prípade ide vždy do nejakého vrcholu susediaceho so Z. Tieto body teda môžeme spojiť do jedného (obdobne, ako sme to spravili s B), ktorý označíme Y. Odpor medzi Y a Z je zrejme $R/3$, rovnako ako aj odpor medzi B a Y. V druhom prípade má prúd vo všetkých troch vrcholoch zodpovedajúcich B 2 možnosti (nakoľko nemôže ísť späť do A), čo je spolu 6 hrán. Vždy však dojde do jedného z 3 vrcholov prvej kocky, ktorý je od A vzdialený 2 hrany. Tieto 3 body zas spojíme do jedného, ktorý označíme C, a odpor medzi ním a B je $R/6$.

Vo vrchole C má zase 2 možnosti. Buď môže ísť do druhej 3D kocky – odpor $R/3$, skončí v bode, ktorý si označíme X, a odpor medzi ním a Y je $R/6$; alebo môže pokračovať ďalej v prvej 3D kocke – odpor $R/3$, skončí vo vrchole 3D kocky, ktorý je oproti A, tento bod si označíme D.

Z vrcholu D už môže prúd ísť jedine do vrcholu druhej 3D kocky, ktorý leží oproti Z. Označme ho W. Potom odpor medzi D a W je R a medzi W a X zase $R/3$. Môžeme teda spočítať odpor medzi bodmi C a X ako paralelné zapojenie „priamej“ cesty (označíme R'_{CX}) a cesty cez D a W (označíme R_{CDWX}).

$$R_{CX} = \frac{R'_{CX} R_{CDWX}}{R'_{CX} + R_{CDWX}} = \frac{\frac{R}{3}\left(\frac{R}{3} + R + \frac{R}{3}\right)}{3\frac{R}{3} + R} = \frac{5}{18}R\,.$$

Následne môžeme obdobne zrátať odpor medzi B a Y

$$R_{BY} = \frac{R'_{BY} R_{BCXY}}{R'_{BY} + R_{BCXY}} = \frac{\frac{R}{3}\left(\frac{R}{6} + \frac{5}{18}R + \frac{R}{6}\right)}{\frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{5}{18}R + \frac{R}{6}} = \frac{11}{51}R\,.$$

Nakoniec spočítame odpor medzi A a Z

$$R_{AZ} = \frac{R'_{AZ} R_{ABYZ}}{R'_{AZ} + R_{ABYZ}} = \frac{R\left(\frac{R}{3} + \frac{11}{51}R + \frac{R}{3}\right)}{R + \frac{R}{3} + \frac{11}{51}R + \frac{R}{3}} = \frac{15}{32}R \doteq 469\,\Omega\,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha FoL.34 ... střelecká levitace

5 bodů

Uvažujme těleso o hmotnosti $M = 12{,}1\,\mathrm{kg}$, které je ve vzduchu udržováno střelbou z AK-47. Spočítejte, s jakou frekvencí musíme střílet, aby těleso neustále oscilovalo mezi dvěma body nízko nad zemí. Přitom uvažujte, že všechny srážky jsou dokonale pružné a náboje o hmotnosti $m = 7{,}93\,\mathrm{g}$ létají přímo vzhůru rychlostí $v = 715\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Nezapomeňte se krýt a pohybujte se jen když nepřátelé nabíjí.

Pokles rychlosti nábojů vzhledem k výšce lze zanedbat, potom můžeme nejnižší bod dráhy tělesa umístit do výšky 0. V ní má rychlost v_0 ve směru dolů. Při dokonale pružné srážce s nábojem se zachová jak hybnost, tak kinetická energie. Jestliže rychlost tělesa po srážce označíme v_0' (tentokrát ve směru nahoru), bude platit

$$mv - Mv_0 = -mv' + Mv_0'\,,$$
$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}Mv_0'^2\,,$$

kde v' je rychlost náboje po srážce (ve směru dolů). Uvědomme si však, že se během letu zachová mechanická energie tělesa, čili rychlost v_0 bude mít stejnou velikost jako v_0'. Dosazením $v_0 = v_0'$ přejde druhá rovnice na $v^2 = v'^2$. Řešení $v = -v'$ nedává fyzikální smysl, takže musí platit $v = v'$. Z první rovnice potom dostaneme

$$v_0 = \frac{m}{M}v\,.$$

Nechť cesta dolů trvá čas t, potom platí $v_0 = gt$. Cesta nahoru bude trvat stejně, tedy celkový čas jedné periody bude

$$T = 2t = \frac{2v_0}{g} = \frac{2mv}{Mg}\,.$$

Nyní už jen spočítáme frekvenci

$$f = \frac{1}{T} = \frac{Mg}{2mv} \doteq 10{,}5\,\mathrm{s^{-1}}\,.$$

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FoL.35 ... spalujeme fosfor 5 bodů

V uzavřené nádobě s objemem $V = 20\,\mathrm{l}$ *spálíme* $m = 213\,\mathrm{mg}$ *práškového fosforu. Kolikrát se v nádobě zvýší tlak po vyrovnání teploty v nádobě s okolím v porovnání s počátečním stavem? Molární objem za standardních podmínek uvažujte* $V_{\mathrm{mol}} = 22{,}4\,\mathrm{l{\cdot}mol^{-1}}$.

Dodo chtěl být trochu zákeřný v. 2.

Vyjdeme z rovnice horenia fosforu

$$4\mathrm{P} + 5\mathrm{O_2} \longrightarrow 2\mathrm{P_2O_5}\,,$$

tj. päť molov plynu na štyri moly fosforu sa menia na 2 moly pevného produktu. Látkové množstvo molekúl kyslíka spotrebované pri reakcii je teda

$$n_{\mathrm{O_2}} = \frac{5}{4}n_{\mathrm{P}} = \frac{5m}{4M_{\mathrm{m}}} \doteq 0{,}008\,59\,\mathrm{mol}\,,$$

kde $M_{\mathrm{m}} = 31{,}0\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$ je molárna hmotnosť atómov fosforu. Využijeme stavovú rovnicu ideálneho plynu v tvare

$$\frac{pV}{Tn} = \mathrm{konst}\,.$$

Pri nami skúmanom procese dochádza k zmene látkového množstva plynu a tlaku. Na začiatku bolo v nádobe $n_1 = V/V_{\mathrm{mol}} \doteq 0{,}892\,9\,\mathrm{mol}$ plynu. Podiel tlakov určíme ako

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{n_2}{n_1} = 1 - \frac{n_{\mathrm{O_2}}}{n_1} = 1 - \frac{5mV_{\mathrm{mol}}}{4M_{\mathrm{m}}V} \doteq 0{,}990\,4\,.$$

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha FoL.36 ... mixovaný proud 4 body

Máme součástku, která se chová jako rezistor s odporem $R = 42\,\Omega$. *Přivedeme na ni elektrický proud se střídavou a stejnosměrnou složkou. Střídavá složka je harmonická s frekvencí* $f = 50{,}0\,\mathrm{Hz}$. *Minimální hodnota celkového proudu je* $12\,\mathrm{mA}$ *a maximální je* $42\,\mathrm{mA}$. *Proud nikdy nemění směr. Jaký je průměrný výkon uvolňovaný na součástce?* *Karel chtěl kombinovat.*

Najprv sa pozrime na to, ako samotný prúd vlastne vyzerá. V zadaní sa píše, že má jednosmernú a harmonickú striedavú zložku, čo môžeme napísať ako $I = I_{\mathrm{DC}} + I_{\mathrm{AC}} \sin(2\pi f t)$. Vo všeobecnosti by ešte tento predpis mohol obsahovať fázu, ale nakoľko nás bude zaujímať priemerný výkon, vôbec na nej nezáleží. Ďalej sa v zadaní píše, že prúd nemení svoj smer, takže $I_{\mathrm{DC}} > I_{\mathrm{AC}}$. Môžeme písať sústavu rovníc

$$I_{\mathrm{DC}} + I_{\mathrm{AC}} = I_{\max} = 42\,\mathrm{mA}\,,$$
$$I_{\mathrm{DC}} - I_{\mathrm{AC}} = I_{\min} = 12\,\mathrm{mA}\,.$$

Z toho môžeme vyjadriť

$$I_{\mathrm{DC}} = \frac{I_{\max} + I_{\min}}{2} = 27\,\mathrm{mA}\,,$$
$$I_{\mathrm{AC}} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} = 15\,\mathrm{mA}\,.$$

Takže už vieme, aký prúd to vlastne súčiastkou tečie. Zostáva vyjadriť, aký výkon sa teda bude uvoľňovať na súčiastke v čase t. Keďže výkon je súčin prúdu a napätia, dostávame

$$P(t) = I(t)U(t) = RI(t)^2 = R\left(I_{\mathrm{DC}}^2 + 2I_{\mathrm{DC}}I_{\mathrm{AC}}\sin\left(2\pi ft\right) + I_{\mathrm{AC}}^2\sin^2\left(2\pi ft\right)\right) .$$

Výkon sa zjavne mení periodicky s periódou $T = 1/f$, takže ak chceme spočítať priemerný výkon, stačí zintegrovať okamžitý výkon cez jednu periódu a predeliť výsledok jej dĺžkou

$$\begin{aligned}\overline{P} &= \frac{1}{T}\int_0^T R\left(I_{\mathrm{DC}}^2 + 2I_{\mathrm{DC}}I_{\mathrm{AC}}\sin\left(2\pi ft\right) + I_{AC}^2\sin^2\left(2\pi ft\right)\right)\mathrm{d}t = \\ &= fR\left[tI_{\mathrm{DC}}^2 - \frac{1}{\pi f}I_{\mathrm{DC}}I_{\mathrm{AC}}\cos\left(2\pi ft\right) + I_{\mathrm{AC}}^2\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin\left(4\pi ft\right)}{8\pi f}\right)\right]_0^{1/f} = \\ &= R\left(I_{\mathrm{DC}}^2 + \frac{I_{\mathrm{AC}}^2}{2}\right) \doteq 35\,\mathrm{mW} .\end{aligned}$$

Výpočet integrálu sme si mohli zjednodušiť uvedomením si, že integrál sínusu cez celú periódu je 0 a integrál druhej mocniny sínusu cez interval rovný násobku jeho polperiódy je polovica tohto intervalu.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha FoL.37 ... stopujeme vlak

5 bodů

Proti superhrdinovi stojícímu na trati se řítí vlak o hmotnosti $m = 500\,\mathrm{t}$ rychlostí $v = 100\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Vlak je ve vzdálenosti $s = 1\,300\,\mathrm{m}$ od superhrdiny, který chce, aby mu zastavil přímo před nosem. Má ovšem k dispozici jen laserové ukazovátko. Jaký výkon musí mít jeho laser, aby se mu to podařilo? Přední část lokomotivy je tvořena zrcadlem.

Jarda má scénář na nový film.

Vďaka tomu, že rýchlosť vlaku je voči rýchlosti svetla extrémne malá, môžeme pohyb vlaku považovať ze rovnomerne spomalený. Najprv si zrátajme, s akým spomalením sa vlak musí pohybovať, aby zastavil superhrdinovi pred nosom. Ide o pohyb s nulovou konečnou rýchlosťou, takže môžeme písať

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}vt .$$

Čiže superhrdina musí zastaviť vlak za čas $t = 2s/v$. Z toho vyplýva, že spomalenie, ktoré musí dosiahnuť, je

$$a = \frac{v}{t} = \frac{v^2}{2s} .$$

Potom sila, ktorou na vlak bude musieť pôsobiť, je

$$F = ma = m\frac{v^2}{2s} .$$

Teraz sa pozrime na laser. Hybnosť jedného fotónu sa dá vyjadriť ako $p = h/\lambda$, kde h je Planckova konštanta a λ je vlnová dĺžka daného fotónu. Energia jedného fotónu je potom $E = ch/\lambda = cp$, kde c je rýchlosť svetla (v skutočnosti sa hybnosť počíta práve ako E/c, čo je priamy dôsledok výpočtu relativistickej energie a toho, že fotón má nulovú pokojovú hmotnosť).

Máme teda jednoduchý vzťah medzi hybnosťou fotónov idúcich zo superhrdinovho lasera a energie, ktorú na to potrebujeme. Zostáva zistiť, akú hybnosť musia mať fotóny vystrelené z lasera za jednotku času. Použijeme známy vzorec

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \, .$$

Tu si ale treba dať pozor: zadanie hovorí, že lokomotíva má vpredu zrkadlo, čiže fotóny nepohlcuje, ale odráža. Teda zmena hybnosti, ktorú „zažijú“ fotóny odrazom od lokomotívy je dvojnásobná oproti hybnosti, ktorú im dá laser. Symbolicky

$$m \frac{v^2}{2s} = 2 \frac{\Delta p_{\mathrm{laser}}}{\Delta t} \, ,$$

kde sme len dosadili veľkosť potrebnej sily.

Na záver si už len stačí uvedomiť, že výkon je energia za čas

$$P = \frac{\Delta E_{\mathrm{laser}}}{\Delta t} = c \frac{\Delta p_{\mathrm{laser}}}{\Delta t} = mc \frac{v^2}{4s} \doteq 22{,}2\,\mathrm{TW} \, .$$

Dodajme ešte, že dnes používané lasery dosahujú špičkové výkony až do rádu petawattov, ide však o lasery pulzné. V prípade spojitých laserov sa výkon pohybuje len do rádu desiatok kilowattov.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha FoL.38 ... solární krychle — 5 bodů

Představme si, že máme satelit ve tvaru dokonalé krychle a jeho povrch je pokrytý solárními články. Umístíme jej tak, že bude obíhat hvězdu po kruhové trajektorii ve velké vzdálenosti. Přitom se ale bude moci libovolně otáčet. Jaký je poměr mezi maximálním a minimálním zářivým výkonem absorbovaným satelitem? Předpokládejte, že veškeré záření dopadnuvší na povrch satelitu bude absorbováno. *Karel viděl solární krychličku na internetu.*

Ve velké vzdálenosti od hvězdy jsou světelné paprsky rovnoběžné, tj. vlnoplochy mají tvar rovin. Výkon, který satelit absorbuje, je přímo úměrný obsahu plochy, jež z této vlnoplochy odstíní. Výsledkem úlohy tak bude poměr mezi maximálním a minimálním průmětem krychle do roviny.

Nechť $\mathbf{z}$ je jednotkový vektor ve směru záření. Potom pro obsah průmětu platí

$$S = \int_{\omega} \left| \mathbf{z} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \right| \, ,$$

kde ω je ta část povrchu krychle, na kterou dopadá záření, a $\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathbf{n}\,\mathrm{d}S$, kde $\mathbf{n}$ značí normálu na malou část povrchu $\mathrm{d}S$. Tento integrál chceme spočítat pro všechny možné vzájemné polohy krychle a vektoru $\mathbf{z}$, abychom mohli vybrat ty s největší a nejmenší hodnotou.

Všimněme si, že v každém okamžiku mohou být osvětleny nejvýše tři stěny krychle. Zároveň všechny osvětlené stěny musejí sdílet alespoň jeden vrchol. Označíme je A, B a C. Normály na tyto stěny budou $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$.

Dále pro stěny, na které záření nedopadá, je skalární součin $\mathbf{z}$ a příslušné normály nulový, tedy můžeme říct, že záření vždy dopadá právě na tři stěny (akorát na některé pod úhlem $0\,^\circ$). Množina ω z integrálu tak bude odpovídat kombinaci povrchů A, B a C. Dostáváme

$$S = \int_A |\mathbf{z} \cdot \mathbf{a}| \,\mathrm{d}S + \int_B |\mathbf{z} \cdot \mathbf{b}| \,\mathrm{d}S + \int_C |\mathbf{z} \cdot \mathbf{c}| \,\mathrm{d}S\,.$$

Na každé straně je výraz $\mathbf{z} \cdot \mathbf{n}$ konstantní. Pro krychli s hranami jednotkové délky máme

$$S = |\mathbf{z} \cdot \mathbf{a}| + |\mathbf{z} \cdot \mathbf{b}| + |\mathbf{z} \cdot \mathbf{c}|\;.$$

Vektor záření můžeme rozdělit na tři složky ve směrech jednotlivých normálových vektorů, které označíme po řadě $\mathbf{z}_a$, $\mathbf{z}_b$ a $\mathbf{z}_c$. Tím se výpočet obsahu zjednoduší na

$$S = |\mathbf{z}_a|\,|\mathbf{a}| + |\mathbf{z}_b|\,|\mathbf{b}| + |\mathbf{z}_c|\,|\mathbf{c}| = |\mathbf{z}_a| + |\mathbf{z}_b| + |\mathbf{z}_c|\;,$$

kde jsme využili toho, že normálové vektory jsou jednotkové. Vektor záření je však také jednotkový a ze vzájemné kolmosti $\mathbf{z}_a$, $\mathbf{z}_b$ a $\mathbf{z}_c$ (která zase vyplývá z kolmosti $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$) platí

$$1 = |\mathbf{z}_a|^2 + |\mathbf{z}_b|^2 + |\mathbf{z}_c|^2\;.$$

Povšimněme si, že tato rovnice připomíná vzorec pro kvadratický průměr velikostí vektorů $\mathbf{z}$. Obdobně, výraz pro výpočet plochy se dá chápat jako jejich aritmetický průměr. Z nerovnosti mezi kvadratickým a aritmetickým průměrem lze snadno získat maximální velikost plochy, minimální lze zase s trochou štěstí odhadnout.

Neznáme-li však tuto nerovnost, nezbývá nám než počítat dál. Označíme-li $x = |\mathbf{z}_a|$ a $y = |\mathbf{z}_b|$, kombinací obou rovnic dostaneme

$$S = x + y + \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,.$$

Vyšetřeme nejprve extrémy uvnitř intervalu přípustných hodnot $x \in \langle 0, 1\rangle$, $y \in \left\langle 0, \sqrt{1 - x^2}\right\rangle$. Parciální derivace funkce $S(x, y)$, které jsou

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 1 - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\,, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = 1 - \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\,,$$

tam musejí být nulové. Z této soustavy rovnic vyjde nejdříve $x = y$ a následně i kvadratická rovnice

$$3x^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

Výsledný obsah bude $S_1 = \sqrt{3}$.

Druhou možností je hledat extrém na hranici intervalu. Pro $y = 0$ máme

$$S = x + \sqrt{1 - x^2}\,,$$

což už je jednoduchá funkce, která má maximum (na přípustném intervalu pro x) $S_2 = \sqrt{2}$ v bodě $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a minimum $S_3 = 1$ pro $x \in \{0, 1\}$.

Pro druhou okrajovou podmínku $y = \sqrt{1 - x^2}$ dostáváme

$$S = x + \sqrt{1 - x^2}\,,$$

což jsme ale už řešili.

Tím jsme prověřili všechny případy a získali jsme všechny možné kandidáty na extrémy. Jelikož $S_1 > S_2 > S_3$, můžeme říct, že maximem funkce $S(x, y)$ na příslušném intervalu je $\sqrt{3}$, zatímco minimem je 1. Řešením úlohy je poměr maxima a minima, což je $\sqrt{3}$.

Závěrem dodejme, že úlohu bylo možné řešit mnohem jednodušeji pomocí intuice – stačilo si představit, jaký obsah má řez krychle rovinou. Nejmenší hodnota odpovídá situaci, kdy je řez rovnoběžný s jednou ze stran, největší obsah dostaneme, pokud je řezem pravidelný šestiúhelník. Toto jsou ovšem pouze odhady, nikoli matematická tvrzení, a samy o sobě na rozdíl od řešení uvedeného výše nic nedokazují.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FoL.39 ... optimální směr 6 bodů

Máme těleso o hmotnosti $M = 1{,}0\,\mathrm{kg}$ ležící na vodorovné podložce, se kterou má koeficient tření $f = 0{,}4$. Jaká může být maximální velikost zrychlení, když na těleso působíme silou velikosti $F = 5\,\mathrm{N}$? *Lego přesouval krabice.*

Nech smer pôsobiacej sily zviera s vodorovným smerom uhol φ. Potom výsledná sila pôsobiaca na teleso bude vodorovná (lebo podložka vykompenzuje zvislú zložku pôsobiacej sily) a bude mať veľkosť

$$F_\mathrm{v} = F\cos\varphi - f\left(Mg - F\sin\varphi\right) .$$

Jediné, čo si môžeme zvoliť, je uhol φ. Takže tento výraz podľa neho zderivujeme a výsledok položíme rovný 0, aby sme dostali extrém

$$-F\sin\varphi + fF\cos\varphi = 0 ,$$
$$f = \operatorname{tg}\varphi .$$

Čiže $\varphi = \operatorname{arctg} f \doteq 0{,}38$. Keď tento uhol dosadíme do F_v a uvedomíme si, že $a_\mathrm{v} = F_\mathrm{v}/M$, dostávame $a_\mathrm{max} \doteq 1{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha FoL.40 ... pozor, Danka hází 6 bodů

Danka háže kriketový míč na rovné ploše. Pod jakým úhlem (vůči vodorovnému směru) má házet, aby dohodila co nejdál? Danka je vysoká $h = 1{,}6\,\mathrm{m}$ a háže rychlostí $v = 4{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.
Házení kriketovým míčkem nikdy nebyl Dančin oblíbený sport.

Zaveďme souřadnicový systém, kde x je vodorovná osa a y je svislá. Označme si úhel od vodorovného směru, ve kterém Danka háže míčem, jako φ. Síla na míč působí pouze ve směru $-y$, takže v ose x se míč pohybuje konstantní rychlostí $v_x = v\cos\varphi$. Pro vodorovnou souřadnici bodu tak platí

$$x = v\cos\varphi\, t .$$

Svislá poloha se bude měnit podle vztahu pro rovnoměrně zrychlený pohyb, takže bude mít velikost

$$y = h + v \sin\varphi \; t - \frac{1}{2} g t^2 \,.$$

Vyloučením času z těchto dvou rovnic získáme závislost výšky na x jako

$$y = h + x \operatorname{tg}\varphi - \frac{g x^2}{2 v^2 \cos^2\varphi} \,.$$

Nás zajímá okamžik, kdy míč dopadl na zem, tedy když $y = 0$. Vodorovnou souřadnici místa dopadu označme d. Použijeme vztah $\cos^{-2}\varphi = \operatorname{tg}^2\varphi + 1$, který dosadíme do rovnice a získáme

$$0 = h + d \operatorname{tg}\varphi - \frac{g d^2}{2 v^2} - \frac{g d^2 \operatorname{tg}^2\varphi}{2 v^2} \,.$$

Toto je kvadratická rovnice nejen pro d, ale i pro $\operatorname{tg}\varphi$. Napišme ji ve tvaru, kde hledaná neznámá je $\operatorname{tg}\varphi$, tedy

$$-\operatorname{tg}^2\varphi \frac{g d^2}{2 v^2} + d \operatorname{tg}\varphi - \frac{g d^2}{2 v^2} + h = 0 \,.$$

Nyní přichází na řadu jednoduchá fyzikální úvaha. Pro většinu d najdeme dva různé úhly, kterými je možné této vzdálenosti dosáhnout. Pokud zvětšujeme d, tak se rozdíl těchto dvou úhlů zmenšuje, až pro $d = d_{\max}$ existuje jen jeden úhel, pod kterým můžeme na toto místo dosáhnout. Matematicky tento případ popisuje nulový diskriminant. Vypočíjeme ho tedy z kvadratické rovnice pro $\operatorname{tg}\varphi$ a položme jej rovný 0, takže

$$d_{\max}^2 + 4 \frac{g d_{\max}^2}{2 v^2} \left(h - \frac{g d_{\max}^2}{2 v^2} \right) = 0 \,,$$

odkud vyjádříme $d_{\max}$ jako

$$d_{\max} = \frac{v}{g} \sqrt{2 g h + v^2} \,.$$

Nyní pokračujme v řešení kvadratické rovnice pro $\operatorname{tg}\varphi$, která se zredukovala na

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v^2}{g d} \,.$$

Dosadíme $d = d_{\max}$ a máme řešení úlohy

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v}{\sqrt{2 g h + v^2}} = 0{,}63 \,.$$

Hledaný opitmální úhel tak je 32°. Všimněme si, že pro $h > 0$ je optimální úhel vždy menší než 45° a s rostoucím h klesá k nule.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha FoL.41 ... laser na koleji 4 body

Jáchym svítí laserem z okna koleje směrem k zemi, Matěj měří záření u země o $\Delta h = 42{,}0\,\mathrm{m}$ níže. Laser vydává záření s frekvencí f_0, ale Matěj naměří frekvenci f. Jaký je poměr absolutní hodnoty rozdílu f a f_0 ku f_0? *Karel opakovaně slyšel o tom, jak se pozorovala černá díra.*

Foton o frekvenci f má energii $E = hf$, kde h je Planckova konstanta. Protože se nacházíme v tíhovém poli, fotony během svého pohybu dolů ztratí potenciální energii $\Delta E = mg\Delta h$, kde m je hmotnost fotonu. Mohli bychom se ptát, jakou hmotnost pod m myslíme, když fotony nemají klidovou hmotnost. Podle teorie relativity je však hmotnost ekvivalentní energii podle vztahu $E = mc^2$, můžeme ji tedy vyjádřit jako

$$m = \frac{hf}{c^2} \approx \frac{hf_0}{c^2}\,.$$

Se ztrátou energie se mění také frekvence, rozdíl mezi počáteční a koncovou hmotností však bude vzhledem k libovolné z obou hmotností zcela zanedbatelný.

Pro proměnu potenciální energie bude platit

$$E - E_0 = \Delta E \quad \Rightarrow \quad h\left(f - f_0\right) = mg\Delta h \approx \frac{hg\Delta h}{c^2} f_0\,.$$

Výsledkem úlohy je veličina

$$k = \frac{|f - f_0|}{f_0} \approx \frac{g\Delta h}{c^2} \doteq 4{,}58 \cdot 10^{-15}\,.$$

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FoL.42 ... pyramida 6 bodů

Na klidném jezeře plove dřevěný pravidelný čtyřboký jehlan o hustotě $\rho_\mathrm{d} = 600\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Pod hladinou je část o výšce $h = 6{,}0\,\mathrm{cm}$. Jehlanu udělíme malý impulz ve vertikálním směru. Nalezněte frekvenci malých kmitů jehlanu. Hustota vody je $\rho_\mathrm{k} = 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Předpokládejte, že kmity jehlanu neovlivní výšku hladiny v jezeře. Jehlan je dokonalý, homogenní a je umístěn přesně špičkou dolů. *Vítek přemýšlel o globálním oteplování.*

Nejdříve umístěme souřadný systém tak, aby počátek ležel ve vrcholu jehlanu, když je v rovnovážné poloze. Dále, před tím, než udělíme impulz, je soustava v rovnováze, to znamená, že můžeme psát rovnost vztlakové a tíhové síly. Pokud označíme plochu podstavy ve výšce h jako s a plochu podstavy ve výšce H jako S (kde výška H označuje celkovou výšku jehlanu, navíc využíváme, že celková hmotnost jehlanu je $M = 1/3\rho_\mathrm{d}SH$), tak získáme

$$sh\rho_\mathrm{k} = SH\rho_\mathrm{d}\,. \tag{2}$$

Pokud povedeme řez přes výšku jehlanu, tak ze shodnosti úhlu mezi vertikální výškou a horizontální základnou plyne, že

$$\frac{h}{a} = \frac{H}{A}\,,$$
$$\frac{s}{S} = \frac{h^2}{H^2}\,,$$

kde A i a označují délky základny v příslušných výškách. Díky tomuto vztahu jsme schopni z (2) získat následující rovnost

$$h^3 \rho_\mathrm{k} = \rho_\mathrm{d} H^3 \,.$$

Po udělení malého impulzu jsme schopni pohyb jehlanu popsat následující pohybovou rovnicí

$$M\ddot{z} = -\rho_\mathrm{k} g \,\mathrm{d}V = -\rho_\mathrm{k} g s z \,,$$

kde $\mathrm{d}V \approx sz$ pro z malé je objem pruhu tělesa, který je ponořený nad rovnovážnou polohou. Dosazením za hmotnost

$$\frac{1}{3}\rho_\mathrm{d} S H \ddot{z} = -\rho_\mathrm{k} g s z \,,$$

$$\ddot{z} + \frac{3 g \rho_\mathrm{k} h^2}{\rho_\mathrm{d} H^3} z = 0 \,.$$

Toto je diferenciální rovnice lineárního harmonického oscilátoru, tedy pro úhlovou frekvenci malých kmitů můžeme psát

$$\Omega^2 = \frac{3 g \rho_\mathrm{k} h^2}{\rho_\mathrm{d} H^3} = \frac{3g}{h} \,,$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{h}} \,.$$

Po dosazení číselných hodnot získáme frekvenci $f \doteq 3{,}52\,\mathrm{Hz}$.

Vít Beran
`vit.beran@fykos.cz`

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha FoL.43 ... tanec na tyči — 6 bodů

Mějme dva souosé válce – menší o vnějším poloměru $r = 1{,}0\,\mathrm{cm}$ a větší o vnitřním poloměru $R = 10\,\mathrm{cm}$. Kolmo na jejich společnou osu jsou válce spojeny tyčkou, na které se u povrchu menšího válce nachází malý korálek. Na povrchu menšího válce se mimo tyčku nachází ještě malá kulička. Válce i oba předměty roztočíme okolo společné osy úhlovou rychlostí $\omega = 2{,}0\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$ a pak korálek i kuličku ve stejný moment uvolníme. Jaký bude časový rozdíl mezi jejich dopady na vnitřní část vnějšího válce? *Až se z toho Jardovi zamotala hlava.*

Spočítajme si najprv pohyb guličky (čiže toho, čo je mimo tyčku). Keď sa oba valce otáčajú uhlovou rýchlosťou ω, gulička má zrejme rýchlosť $r\omega$ v smere dotyčnice k malému valcu. V momente, keď ju pustíme, už ju nebude viac meniť a poletí rovnomerne priamočiaro, kým nenarazí do veľkého valca. Otázka teda znie, aká dlhá bude táto dráha. To však dostaneme veľmi jednoducho z Pytagorovej vety ako $s_1 = \sqrt{R^2 - r^2}$. Takže čas, ktorý uplynie medzi momentom, kedy guličku pustíme pri menšom valci, a momentom, kedy narazí do väčšieho valca, bude

$$t_1 = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{r\omega} \doteq 5{,}0\,\mathrm{s} \,.$$

Poďme sa ďalej pozrieť na korálik na tyčke. To, že je navlečený na tyčke spôsobuje, že sa korálik bude otáčať s konštantnou uhlovou rýchlosťou ω aj potom, ako ho pustíme z valca. Presunieme sa teda do sústavy rotujúcej spolu s valcami (a teda hlavne s tyčkou). V tejto sústave bude na korálik pôsobiť odstredivá sila, ktorá sa dá vyjadriť aj ako $F_{\mathrm{ods}}(t) = m\omega^2 r(t)$, kde $r(t)$ značí polohu korálika na paličke v čase t. Stačí vydeliť obe strany rovnice hmotnosťou korálika a dostávame zrýchlenie, s akým sa bude korálik pohybovať po tyčke v čase t. Toto zrýchlenie je zjavne druhou deriváciou $r(t)$, takže dostávame diferenciálnu rovnicu

$$\ddot{r}(t) = \omega^2 r(t)\,.$$

Podobné rovnice sa najjednoduchšie riešia pomocou tzv. charakteristického polynómu. To znamená, že si povieme, že naše riešenie má tvar $r(t) = r_0 \mathrm{e}^{\lambda t}$. Následne toto dosadíme do našej diferenciálnej rovnice a dostávame

$$\lambda^2 r_0 \mathrm{e}^{\lambda t} = \omega^2 r_0 \mathrm{e}^{\lambda t}\,.$$

V prvom rade si môžeme všimnúť, že $r_0 = 0$ by našu rovnicu automaticky splnilo. Čo dáva zmysel, pretože ak by korálik začínal na osi otáčania, nič by ho netlačilo von. Lenže on začal na povrchu valca, takže toto riešenie nás nezaujíma. Ďalej vieme, že exponenciála nie je nikdy nulová, takže ju môžeme vykrátiť. Vykrátime aj r_0 a zostáva nám, že $\lambda = \pm\omega$. Keď riešime diferenciálnu rovnicu n-tého rádu (rovnicu, ktorá obsahuje najviac n-tú deriváciu), dostaneme vždy n riešení. Ďalší krok je, že si napíšeme výsledné riešenie ako ich súčet. V našom prípade

$$r(t) = r_1 \mathrm{e}^{\omega t} + r_2 \mathrm{e}^{-\omega t}\,.$$

To je všeobecné riešenie pohybu korálika po tyčke otáčajúcej sa uhlovou rýchlosťou ω. Zostáva z neho zistiť, ako sa bude pohybovať v našom prípade. Vieme, že v čase $t = 0$ (tak sme si označili čas, keď sme ho pustili) bola jeho vzdialenosť od osi otáčania rovná polomeru menšieho valca r a rýchlosť v smere tyčky nulová. To nám dáva sústavu dvoch rovníc

$$\begin{aligned} r &= r_1 + r_2\,,\\ 0 &= \omega r_1 - \omega r_2\,, \end{aligned}$$

ktorej riešením je zrejme $r_1 = r_2 = r/2$. Keď tento výsledok dosadíme do všeobecného riešenia, dostaneme

$$r(t) = \frac{r}{2}\left(\mathrm{e}^{\omega t} + \mathrm{e}^{-\omega t}\right) = r\cosh\omega t\,.$$

Ak by sme si ten cosh nevšimli, nič hrozné sa nedeje, akurát potom treba výsledný čas nájsť nejako inak, či už pomocou vhodnej substitúcie (voľbou $x = \mathrm{e}^{\omega t}$ dostaneme kvadratickú rovnicu), alebo pokojne aj numericky, keďže sme už na konci výpočtu.

No a nás už len zaujíma, kedy korálik narazí do väčšieho valca. Matematicky povedané, pre aké t_2 platí $R = r(t_2)$. Z predchádzajúceho vzťahu potom dostávame

$$t_2 = \frac{1}{\omega}\operatorname{argcosh}\frac{R}{r} \doteq 1{,}5\,\mathrm{s}\,.$$

Odčítaním dostaneme hľadanú odpoveď, a to že časový rozdiel dopadov korálika a guličky bude $\Delta t = t_1 - t_2 \doteq 3{,}5\,\mathrm{s}$.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha FoL.44 ... pád do neznáma 7 bodů

Mějme nekonečnou uzemněnou vodivou desku v beztíži. Ve vzdálenosti $d = 1{,}00\,\mathrm{m}$ *od desky se nachází náboj o velikosti* $q = 4{,}00\,\mathrm{\mu C}$. *Tento náboj je na malé kuličce o hmotnosti* $m = 2{,}00\,\mathrm{g}$. *Náboj uvolníme. Za jak dlouho spadne na desku?*

Jarda věděl, že to časem spadne, ale chtěl vědět, kdy přesně.

Nejprve musíme najít sílu, kterou deska působí na náboj. Na desce se elektrostaticky indukuje náboj opačného znaménka, než je q. V rovnovážném stavu se náboje uvnitř desky nepohybují, takže na ně nepůsobí žádná síla v rovině desky. Potenciál na desce je tak konstantní a je určen až na konstantu, takže můžeme říct, že na desce je potenciál nulový. Je dán součtem potenciálu nábojů na desce a potenciálu náboje q. Tedy

$$\varphi_q + \varphi_\mathrm{d} = 0\,,$$

kde φ_q je potenciál náboje q a φ_d je potenciál desky. Odtud dostaneme

$$\varphi_\mathrm{d} = -\varphi_q\,.$$

Vidíme, že potenciál desky na samotné desce je stejný, jako kdyby na opačné straně desky od q existoval náboj $-q$, a to ve vzdálenosti d od desky. Nyní tedy můžeme všechny indukované náboje na desce nahradit jediným nábojem $-q$. Síla, kterou působí na náš náboj q, je

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q^2}{(d+d)^2} = \frac{1}{16\pi\varepsilon}\frac{q^2}{d^2}\,.$$

Protože náboje mají opačná znaménka, náboj q je přitahován k desce. Tento výpočet je založen na metodě zrcadlového náboje. Vidíme, že síla je nepřímo úmerná druhé mocnině vzdálenosti náboje od desky. Když už jsme k řešení úlohy použili zrcadlo, proč rovnou nepoužít pohyby planet? Gravitační síla je stejně jako naše síla F také úměrná r^{-2}. Pohyb náboje se tak bude řídit Keplerovými zákony, jen musíme upravit konstanty. Třetí Keplerův zákon je

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{MG}{4\pi^2}\,.$$

Místo konstant z gravitačního zákona napíšeme naše parametry, ale fyzikální chování zůstane stejné. Rovnici přepíšeme do tvaru

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{q^2}{64\pi^3\varepsilon m}.$$

K čemu nám tato rovnice vůbec je? Vždyť náboj q se nebude pohybovat po elipse, poletí po přímce kolmo na rovinu. Pokud ale budeme uvažovat nekončně tenkou elipsu, s ohnisky téměř v počátečním a koncovém bodě, pak taková elipsa napodobí úsečku, po které se náboj bude pohybovat. U této elipsy je hlavní poloosa a rovna $\frac{d}{2}$. Perioda tak je

$$T = \sqrt{\frac{64\pi^3\varepsilon m\left(\frac{d}{2}\right)^3}{q^2}} = \sqrt{\frac{8\pi^3\varepsilon m d^3}{q^2}}\,.$$

Let z počátečního bodu na desku trvá ovšem jen polovinu periody, tedy čas a konečné řešení úlohy je

$$t = \frac{T}{2} = \sqrt{\frac{2\pi^3\varepsilon m d^3}{q^2}} \doteq 0{,}262\,\mathrm{s}\,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha FoL.45 ... pramen poznání 7 bodů

Jáchym má studnu poznání, která má konstantní kruhový průřez s poloměrem $r = 1{,}5\,\mathrm{m}$ a hloubku $h = 32\,\mathrm{m}$. Úplně na dně uprostřed kruhu se nachází bod, který do okolí rovnoměrně vyzařuje poznání s celkovým výkonem P_0. Poznání se šíří jako světelné paprsky, přičemž koeficient odrazivosti od stěn studny je $k = 0{,}42$. Ode dna se poznání vůbec neodráží, ale je celé pohlceno. Celkové poznání, které ze studny vyzařuje, má výkon P. Najděte poměr P/P_0.

Studně jsou nevyčerpatelnými studnicemi nápadů.

Úloha je radiálně symetrická. Představme si jeden z možných dvojrozměrných průřezů – studna v něm má tvar obdélníku s rozměry $2r \times h$, přičemž pramen poznání se nachází v polovině dolní strany. Označme úhel odklonu od svislého směru φ, potom všechny paprsky s úhlem od $\varphi_0 = 0$ do

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{r}{h}$$

vyjdou ze studně bez jediného odrazu čili s plným původním výkonem. Obecně se paprsky s úhlem mezi φ_i a φ_{i+1}, kde

$$\varphi_i = \operatorname{arctg} \frac{(2i-1)\,r}{h}\,,$$

odrazí celkem i-krát (nazvěme je paprsky v i-té zóně). Jejich intenzita potom bude k^i násobek té původní.

Abychom úlohu dořešili, musíme ještě zjistit, jaký výkon odpovídá které zóně. Představme si kouli o poloměru R se středem v bodě poznání. Na jejím povrchu je intenzita poznání všude stejná a má velikost

$$I_0 = \frac{P_0}{4\pi R^2}\,,$$

což je celkový výkon dělený celkovou plochou. Do každé zóny dopadne výkon rovný $I_0 S_i$, kde S_i je plocha na myšlené kouli příslušná této zóně, tj. plocha mezi úhly φ_i a φ_{i+1}. Tu můžeme snadno spočítat jako

$$S_i = \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} 2\pi R \sin\varphi R \,\mathrm{d}\varphi = 2\pi R^2 \left[-\cos\varphi\right]_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} = 2\pi R^2 \left(\cos\varphi_i - \cos\varphi_{i+1}\right)\,.$$

Celkový výkon, který unikne ze studně zónou i, bude

$$p_i = k^i I_0 S_i = P_0 \frac{k^i}{2} \left(\cos\varphi_i - \cos\varphi_{i+1}\right)\,,$$

přičemž hledaný poměr výkonů je suma

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{p_i}{P_0} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(1-k)}{k} \sum_{i=1}^{\infty} k^i \cos\varphi_i\right)\,.$$

Pomocí goniometrické identity

$$\cos \operatorname{arctg} x = \left(1 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

si můžeme předchozí výraz upravit na

$$\eta = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(1-k)}{k} \sum_{i=1}^{\infty} k^i \left(1 + \left(\frac{(2i-1)\,r}{h}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\,.$$

Sumu musíme spočítat numericky, vyjde přibližně 0,716. Poměr výkonů pak bude $\eta \doteq 5{,}53 \cdot 10^{-3}$.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha FoL.46 ... nesmírná vesmírná bitka 8 bodů

Ocitli jsme se uprostřed vesmírné bitvy mezi civilizací 1 a civilizací 2. Křižník civilizace 1 právě odpálil raketu na křižník civilizace 2. Lodě jsou od sebe vzdáleny vzdáleností $s = 5{,}00\,\mathrm{km}$ a navzájem se vůči sobě nepohybují. Parametry rakety jsou: při výstřelu váží hmotností $m_0 = 5{,}00\,\mathrm{t}$, tah motoru je $T = 1{,}50 \cdot 10^5\,\mathrm{N}$ a výtok má rychlost $u = 3{,}00\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$. Motor rakety je zapnutý na maximální tah od okamžiku vypuštění do okamžiku nárazu. Jakou rychlostí narazí raketa do křižníku civilizace 2? *Jindra se díval na Hvězdné války.*

Rychlost rakety popisuje Ciolkovského rovnice

$$v(t) - v_0 = u \ln \frac{m_0}{m(t)} \,. \tag{3}$$

Počáteční rychlost v_0 je nulová a hmotnost rakety závisí na čase podle vztahu $m(t) = m_0 - Rt$, kde R je hmotnostní tok paliva

$$R = \frac{T}{u} \,.$$

Číselně je $R = 50{,}0\,\mathrm{kg \cdot s^{-1}}$. Po dosazení do rovnice (3) vyjde

$$v(t) = u \ln \frac{m_0}{m_0 - Rt} \,. \tag{4}$$

Zintegrováním rovnice (4) získáme závislost uražené vzdálenosti na čase. Počáteční podmínka je $s(t = 0) = 0$, tedy

$$s(t) = ut + ut \ln \frac{m_0}{m_0 - Rt} - \frac{m_0 u}{R} \ln \frac{m_0}{m_0 - Rt} \,. \tag{5}$$

Numerickým řešením rovnice (5) zjistíme čas, za jaký raketa doletí do vzdálenosti $s = 5{,}00\,\mathrm{km}$. Ten pak dosadíme do rovnice (4) a spočítáme rychlost rakety v okamžiku nárazu. Vyjde $t \doteq 17{,}7\,\mathrm{s}$ a $v \doteq 584\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Vidíme, že válčící civilizace nejsou nijak extrémně vyspělé, neboť se jejich torpéda pohybují velmi malými rychlostmi v porovnání s rychlostí světla. Proto jsme mohli výpočet bezpečně provést i bez použití speciální teorie relativity.

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Úloha FoL.47 ... rotační čerpadlo 8 bodů

Vítek by si rád ze své studny nabral vodu, ale nechce se mu tahat vědro nahoru. Proto vodu postupně roztáčel, až při úhlové rychlosti $\omega = 11\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ začala sama téct ze studny. Vítek ví, že hloubka studny (od horního okraje ke dnu) je $h = 47\,\mathrm{m}$. Studna má kruhový průřez s poloměrem $r_0 = 1{,}6\,\mathrm{m}$. V jaké výšce (měřeno od dna) byla voda předtím, než ji Vítek roztočil?
Jáchym slyšel, že na Fyziklání 2020 byly populární úlohy se studnami.

Zaveďme válcové souřadnice, ve kterých vodorovnou vzdálenost od středu studny označíme r, úhel otočení bude φ a výšku ode dna budeme značit z.

Na malý objem rotující vody s hmotností m ve vzdálenosti r působí odstředivá síla $F_\mathrm{o} = m\omega^2 r$. Na stejný objem vody působí tíhová síla $F_G = mg$. Hladina není nic jiného než oblast s konstantním potenciálem. Potenciální energii od ostředivé síly spočítáme jako

$$E_\mathrm{o}(r) = \int_0^r -F_\mathrm{o}(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^r m\omega^2 x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2\,.$$

Znaménko mínus je tu proto, že integrujeme proti směru síly, kterou bychom museli vyvinout, abychom překonali odstředivou sílu. Energie od tíhové síly bude

$$E_G(z) = \int_0^z F_G\,\mathrm{d}x = mgz\,.$$

Jak již bylo řečeno, hladina je plocha s konstantním potenciálem. Pro každý bod na hladině se souřadnicemi r_h, z_h platí

$$E_\mathrm{o}(r_\mathrm{h}) + E_G(z_\mathrm{h}) = \mathrm{konst}\,.$$

Z této podmínky přímo dostáváme výšku hladiny jako funkci vzdálenosti od středu

$$z_\mathrm{h}(r) = \frac{\omega^2}{2g}r^2 + z_0\,,$$

kde z_0 je výška vody ve středu studny. Tento vzorec samozřejmě platí jen v případě, že je všude hladina nade dnem. Pokud by totiž ve studni bylo příliš málo vody, mohlo by se stát, že parabola, která nám vyšla, bude protínat dno. Zatím předpokládejme, že se nic takového neděje. Později ověříme, zda byl tento předpoklad správný.

Objem vody se roztočením nezmění. Počáteční objem byl $V = \pi r_0^2 z_\mathrm{v}$, kde z_v je hledaná původní výška hladiny vody. Po roztočení máme

$$V = \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} z_\mathrm{h}(r) r\;\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^{r_0} 2\pi z_\mathrm{h}(r) r\;\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^{r_0}\left(\frac{\omega^2}{2g}r^3 + z_0 r\right)\,\mathrm{d}r = \pi\left(\frac{\omega^2}{4g}r_0^4 + z_0 r_0^2\right)\,.$$

Odtud si již snadno vyjádříme výšku vody uprostřed jako

$$z_0 = z_\mathrm{v} - \frac{\omega^2}{4g}r_0^2\,.$$

Ze zadání víme, že při dané úhlové rychlosti se voda akorát začala vylévat ven. To můžeme zapsat jako $z_\mathrm{h}(r_0) = h$. Z této podmínky vyplývá

$$h = \frac{\omega^2}{2g}r_0^2 + z_0 = \frac{\omega^2}{2g}r_0^2 + z_\mathrm{v} - \frac{\omega^2}{4g}r_0^2\,.$$

Hledaná počáteční výška vody proto bude

$$z_\mathrm{v} = h - \frac{\omega^2}{4g}r_0^2 \doteq 39\,\mathrm{m}\,.$$

Nakonec jen ověříme, že pro tento výsledek vychází $z_0 \doteq 31\,\mathrm{m}$, předpoklad výše byl proto oprávněný.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FoL.48 ... ideální odstředivka 9 bodů

Představme si trubku naplněnou ideálním plynem o molární hmotnosti $M_m = 36\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$. Délka trubky je $r_0 = 1{,}00\,\mathrm{m}$, rozměr jejího průřezu je vůči délce zanedbatelně malý. Nyní trubku roztočíme úhlovou rychlostí $\omega = 451{,}00\,\mathrm{s^{-1}}$ podél osy ležící v rovině jedné z jejích podstav. Plyn uvnitř se ustálí v rovnovážném stavu spolu s trubkou o teplotě $T = 300\,\mathrm{K}$. V jaké vzdálenosti od osy rotace se bude nacházet těžiště vzduchu v trubce? Pohyb probíhá ve vodorovné rovině. *Jáchym chtěl separovat vzduch.*

Zavedeme si souřadnici od bodu otáčení do konce trubky, tedy od 0 do r_0, kterou budeme značit r. V nějakém úseku $\mathrm{d}r$ je plyn o hmotnosti $\mathrm{d}m = \lambda(r)\,\mathrm{d}r$. Po ustálení musí být v trubce stejná teplota jako na začátku (je adiabaticky izolovaná), ze stavové rovnice díky tomu pro tlak v daném úseku máme

$$p = \frac{\mathrm{d}nRT}{\mathrm{d}V} = \frac{\mathrm{d}nRT}{S\,\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}mRT}{M_\mathrm{m}S\,\mathrm{d}r} = \frac{RT}{M_\mathrm{m}S}\lambda\,,$$

kde S je plocha průřezu trubky. Odtud zřejmě

$$\mathrm{d}p = \frac{RT}{M_\mathrm{m}S}\lambda'\,\mathrm{d}r\,.$$

Na daný úsek musí působit dostředivá síla

$$\mathrm{d}F_\mathrm{d} = \mathrm{d}m\omega^2 r\,,$$

která je způsobena rozdílem tlaků, můžeme proto psát $S\,\mathrm{d}p = \mathrm{d}F_\mathrm{d}$. Dosazením dostáváme

$$\frac{RT}{M_\mathrm{m}}\lambda'\,\mathrm{d}r = \mathrm{d}m\omega^2 r\,,$$

což je konečně diferenciální rovnice

$$\lambda' = \frac{\omega^2 M_\mathrm{m}}{RT}\lambda r = 2k^2\lambda r\,,$$

kde jsme jako k chytře označili konstantu

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2 M_\mathrm{m}}{2RT}} \doteq 1{,}212\,\mathrm{m^{-1}}\,.$$

Řešením této rovnice je zřejmě

$$\lambda = A\mathrm{e}^{k^2r^2}\,,$$

kde A je normovací konstanta. Nyní už jen spočítáme těžiště

$$T_r = \frac{1}{m}\int_0^{r_0} r\,\mathrm{d}m = \frac{\int_0^{r_0} r\lambda\,\mathrm{d}r}{\int_0^{r_0}\lambda\,\mathrm{d}r} = \frac{A\int_0^{r_0} r\mathrm{e}^{k^2r^2}\,\mathrm{d}r}{A\int_0^{r_0}\mathrm{e}^{k^2r^2}\,\mathrm{d}r}$$

a po substituci $x = kr$ máme

$$T_r = \frac{1}{2k}\frac{\int_0^{kr_0} 2x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x}{\int_0^{kr_0}\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{2k}\frac{\left[\mathrm{e}^{x^2}\right]_0^{kr_0}}{\int_0^{kr_0}\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{2k}\frac{\mathrm{e}^{k^2r_0^2}-1}{\int_0^{kr_0}\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{k}\frac{\mathrm{e}^{k^2r_0^2}-1}{\sqrt{\pi}\,\mathrm{erfi}(kr_0)} \doteq 0{,}629\,\mathrm{m}\,,$$

kde erfi je imaginární chybová funkce.

Statistické řešení

Úlohu lze řešit i pomocí statistické fyziky, vyžaduje to ale schopnost počítat se statistickými soubory.

Jednočásticový hamiltonián můžeme psát ve tvaru

$$H_1(X_1) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{L} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \omega\mathbf{n}_3\cdot\mathbf{x}\times\mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}^2 - 2m\omega\mathbf{p}\cdot\mathbf{n}_3\times\mathbf{x}}{2m} =$$
$$= \frac{(\mathbf{p} - m\omega\mathbf{n}_3\times\mathbf{x})^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{2}(\mathbf{n}_3\times\mathbf{x})^2 = \frac{\mathbf{p}'^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{2}r^2\,,$$

kde X_1 je mikrostav jedné částice, m je její hmotnost a vektory $\mathbf{x} = (x_1,\, x_2,\, x_3)$ a $\mathbf{p} = (p_1,\, p_2,\, p_3)$ reprezentují její souřadnice a hybnost. Jako $\mathbf{n}_3$ jsme označili jednotkový vektor ve směru třetí souřadnicové osy, kterou volíme totožnou s osou rotace. Dále jsme zavedli novou souřadnici $\mathbf{p}' = \mathbf{p} - m\omega\mathbf{n}_3\times\mathbf{x}$, což je jen posunutá hybnost. Později při integraci přes celý fázový prostor toto posunutí nebude hrát roli. Vůči tvaru pro volnou částici je v hamiltoniánu navíc potenciálový člen, který klesá se vzdáleností od osy. Tento potenciál odpovídá odstředivé síle, která na částice působí v rotující soustavě. Proměnná r udává vzdálenost od osy otáčení a platí pro ni $r^2 = x_1^2 + x_2^2$.

Jelikož se jedná o systém s konstantní teplotou, použijeme k jeho popisu kanonický soubor. Trubku si pomyslně rozsekáme na velmi malé souosé vrstvy tloušťky Δr kolmé na osu trubky. Zaměříme se na jednu vrstvu, která je ve vzdálenosti r od osy otáčení. Pro tuto vrstvu nyní můžeme spočítat jednočásticovou partiční funkci

$$Z_1(r) = \frac{1}{h^3}\int \mathrm{e}^{-\beta H_1(X_1)}\,\mathrm{d}X_1 = \frac{1}{h^3}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\beta p'^2}{2m}}\,\mathrm{d}p'\right)^3 S\Delta r\mathrm{e}^{-\frac{\beta m\omega^2 r^2}{2}} = \frac{V}{\kappa^3}\mathrm{e}^{-\frac{\beta m\omega^2 r^2}{2}}\,,$$

kde integrace probíhá přes všechny možné stavy X_1 jedné částice, $\beta = \frac{1}{k_\mathrm{B}T}$ a h je Planckova konstanta. Rovnou jsme zavedli pomocnou konstantu

$$\kappa = h\sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}}$$

a objem vrstvy jsme označili $V = S\Delta r$. Jelikož se jedná o ideální plyn, částice spolu neinteragují, a proto můžeme celkovou partiční sumu zapsat jako

$$Z(r) = \frac{Z_1(r)^{N(r)}}{N(r)!}\,,$$

kde $N(r)$ je počet částic v dané vrstvě. Ze statistické fyziky víme, jak tento výsledek souvisí s Helmholtzovou volnou energií $F = -\frac{1}{\beta}\ln Z$, a víme také, že chemický potenciál $\mu(r)$ můžeme spočítat jako derivaci F podle počtu částic N. Lze tedy psát

$$\mu(r) = \frac{\partial F}{\partial N} = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln Z}{\partial N} = -\frac{1}{\beta}\left(\ln\frac{\mathrm{e}Z_1}{N} - \frac{\mathrm{e}Z_1}{N}\right) \approx \frac{1}{\beta}\ln\frac{N}{\mathrm{e}Z_1} = \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{N\kappa^3}{\mathrm{e}V}\mathrm{e}^{-\frac{\beta m\omega^2 r^2}{2}}\right)\,,$$

kde jsme použili aproximaci

$$N! \approx \left(\frac{N}{\mathrm{e}}\right)^N$$

a člen $\frac{eZ_1}{N}$ jsme zanedbali, protože je v termodynamické limitě nulový. Nyní využijeme faktu, že aby mezi jednotlivými vrstvami nastala rovnováha, $\mu(r) = \mu_0$ musí být konstantní. To znamená, že konstantní musí být celý výraz uvnitř logaritmu. Se zavedením objemové hustoty částic $n(r) = \frac{N}{V}$ dostáváme

$$\frac{N\kappa^3}{\mathrm{e}V}\mathrm{e}^{-\frac{\beta m\omega^2 r^2}{2}} = \mathrm{konst}\,,$$
$$n(r) = n_0\mathrm{e}^{\frac{\beta m\omega^2 r^2}{2}}\,,$$

kde n_0 je objemová hustota částic u toho konce trubky, kolem nějž se trubka otáčí.

Zbývá spočítat polohu těžiště

$$T_r = \frac{\int_0^{r_0} rn(r)\,\mathrm{d}r}{\int_0^{r_0} n(r)\,\mathrm{d}r} = \frac{\int_0^{r_0} r\mathrm{e}^{k^2r^2}\,\mathrm{d}r}{\int_0^{r_0} \mathrm{e}^{k^2r^2}\,\mathrm{d}r}\,,$$

kde $k = \sqrt{\frac{\beta m\omega^2}{2}}$. Dostáváme tak stejný výsledek jako v předchozím případě.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha FoL.49 ... padající impulz — 9 bodů

Ze stropu visí vlákno s délkou $l = 1{,}00\,\mathrm{m}$ a celkovou hmotností $m_\mathrm{v} = 1{,}00\,\mathrm{g}$. Na jeho spodním konci je závažíčko s neznámou hmotností m. Shora dolů po vlákně vyšleme impulz. Ve stejnou chvíli pustíme ze stropu hmotný bod. Všimneme si dvou věcí:

1. *impulz se po vlákně šíří konstantní rychlostí,*
2. *impulz dorazí na spodní konec vlákna ve stejný čas jako hmotný bod.*

Jaká je hmotnost závažíčka? Děj se odehrává v homogenním tíhovém poli se zrychlením $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. *Jirka nedokázal vymyslet, jak ho to vlastně napadlo.*

Označme vzdálenost od vrchního konce vlákna jako x. Spodní konec vlákna se nachází na souřadnici $x = l$. Impulz se šíří rychlostí

$$v(x) = \sqrt{\frac{F(x)}{\lambda(x)}} = \mathrm{konst}\,,$$

kde $F(x)$ je síla napínající vlákno v bodě se souřadnicí x a $\lambda(x)$ je délková hustota vlákna v tomtéž bodě. O rychlosti impulzu víme, že je po celé délce vlákna konstantní. Sílu $F(x)$ zjistíme tak, že zintegrujeme infinitezimální příspěvky od kousíčků vlákna mezi souřadnicemi x a l, tedy že spočteme

$$F(x) = \left(m + \int_x^l \lambda(t)\,\mathrm{d}t\right) g\,.$$

Z první rovnice si vyjádříme sílu, po dosazení dostaneme

$$\frac{v^2}{g}\lambda(x) = m + \int_x^l \lambda(t)\,\mathrm{d}t = m + L(l) - L(x)\,, \tag{6}$$

kde L je primitivní funkce k λ. Tento vztah zderivujeme podle x, čímž dostaneme difereciální rovnici

$$\frac{v^2}{g}\lambda' = -\lambda\,,$$

kterou můžeme řešit například separací proměnných. Vyjde nám

$$\lambda = \lambda_0 \mathrm{e}^{-\frac{g}{v^2}x}\,,$$

kde λ_0 je neznámá konstanta, kterou musíme zjistit z okrajových podmínek. Vidíme, že délková hustota vlákna klesá exponenciálně se vzdáleností od vrchního konce. Celková hmotnost vlákna je

$$m_\mathrm{v} = \int_0^l \lambda_0 \mathrm{e}^{-\frac{g}{v^2}t}\,\mathrm{d}t = \frac{\lambda_0 v^2}{g}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{gl}{v^2}}\right),$$

odtud už lze λ_0 získat jako

$$\lambda_0 = \frac{m_\mathrm{v} g}{v^2\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{gl}{v^2}}\right)}\,.$$

V rovnici (6) položíme $x = 0$ a vyjádříme si odtud hledanou hmotnost závaží

$$m = \frac{v^2}{g}\lambda_0 - \int_0^l \lambda\,\mathrm{d}x\,.$$

Tento integrál jsme už jednou počítali, vyjde m_v. Dosazením za λ_0 dostáváme

$$m = \frac{v^2}{g}\cdot\frac{m_\mathrm{v} g}{v^2\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{gl}{v^2}}\right)} - m_\mathrm{v} = m_\mathrm{v}\left(\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\frac{gl}{v^2}}} - 1\right) = \frac{m_\mathrm{v}}{\mathrm{e}^{\frac{gl}{v^2}} - 1}\,.$$

Teď využijeme informaci, že impulz dorazil na konec vlákna za stejný čas t jako hmotný bod padající z výšky l. Platí

$$l = vt\,,$$
$$l = \frac{1}{2}gt^2\,,$$

kde si uvědomíme, že v není rychlost na konci pádu tělíska, ale rychlost šíření vlny na vlákně, tedy průměrná rychlost. Z toho vyplývá

$$v^2 = \frac{gl}{2}\,,$$

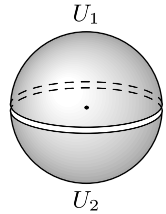
můžeme proto dosadit

$$m = \frac{m_\mathrm{v}}{\mathrm{e}^2 - 1} \doteq 0{,}157\,\mathrm{g}.$$

Hmotnost závažíčka je přibližně 0,157 g.

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha FoL.50 ... úloha s potenciálem 3 body



Lego vzal dvě kulové poloslupky se stejným poloměrem a nevodivě je spojil tak, aby tvořily kouli. Potom na jednu přivedl potenciál $U_1 = 100\,\mathrm{V}$ a na druhou $U_2 = -100\,\mathrm{V}$. Jaký bude potenciál uprostřed koule?

Lego vedel, že má potenciál...

Úloha sa, samozrejme, dá riešiť pomocou Laplaceovej rovnice, ale s tým ešte chvíľu počkajme...

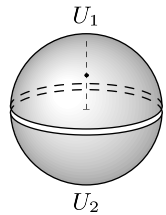
Označme si hľadaný potenciál uprostred gule ako φ. Ak potom vymeníme U_1 a U_2, tak sme zmenili znamienko všetkým potenciálom v zadaní. Teda sa zrejme zmení znamienko aj všetkým potenciálom v riešení a φ prejde na $-\varphi$ (môžeme sa na to pozerať aj tak, že ak by boli mimozemšťania, ktorí majú znamienka elektrického náboja definované presne naopak, tak toto je príklad, ktorý by počítali oni).

Keď ale zároveň zameníme tie potenciály na kraji, je to ako keby sme guľu len otočili (alebo sme guľou ani nepohli, len sa na ňu pozeráme z opačnej strany). A to predsa nemôže ovplyvniť potenciál v jej strede. Takže dostávame rovnicu $\varphi = -\varphi$, ktorej jediným riešením je, samozrejme, 0.

Takže potenciál uprostred gule bude $\varphi = 0\,\mathrm{V}$.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha FoL.51 ... další úloha s potenciálem 9 bodů



Lego vzal dvě kulové poloslupky se stejným poloměrem a nevodivě je spojil tak, že tvořily kouli. Potom na jednu přivedl potenciál $U_1 = 100\,\mathrm{V}$ a na druhou $U_2 = -100\,\mathrm{V}$. Jaký bude potenciál ve středu úsečky vedoucí od středu koule k vrcholu kladně nabité polokoule (viz obrázek)?

... a tiež si myslel, že je väčší než 0.

Numerické riešenie

Pre elektrický potenciál mimo bodov, v ktorých sa nachádza náboj (čiže pre celé vnútro gule) platí Laplaceova rovnica:

$$\Delta\Phi = 0\,,$$

pre predstavu stačí, keď si uvedomíme, že Laplace je vlastne len súčet druhých derivácii vo všetkých (troch) smeroch. Teoreticky by sme si teda mohli guľu diskretizovať ako 3D mriežku bodov. Potom by sme diferenciáciou Laplaceovej rovnice dostali, že potenciál v každom bode bude aritmetickým priemerom potenciálov tých okolitých 6 a nechali počítač, aby tento predpis (pre fixne zvolené potenciály na okraji) iteroval, dokým by nedokonvergoval. Lenže to by pre požadovanú presnosť trvalo veľmi dlho (bez použitia nejakého externého serveru kľudne viac, než dĺžka súťaže). Takže ako to v elektrostatických úlohách býva - využijeme symetriu úlohy. Laplace vo sférických súradniciach vyzerá nasledovne

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\,.$$

Keď si zvolíme osu z, zhodnú s osou symetrie našej úlohy, potom zrejme potenciál nebude závisieť od súradnice φ (symbolicky $\Phi = \Phi(r, \theta)$) a teda tretí člen bude nulový. Hlavne ale môžeme úlohu diskretizovať iba pomocou 2 premenných. Máme teda 2D mriežku, kde každý bod je popísaný dvojicou indexov i, j a jemu prislúchajúci potenciál je $\Phi(r, \theta) = \Phi(ih_r, jh_\theta) = f(i, j)$. Kde f sme si zaviedli len pre lepšiu prehľadnosť a h_r, h_θ sú konštanty, ktoré vyjadrujú dĺžku kroku. Takže keď indexujeme naše body od 0, potom $h_r = R/i_{\max}$, kde R je polomer gule, $i_{\max}$ je maximálny index i a $h_\theta = \pi/2j_{\max}$, pretože zovšeobecnením môžeme získať riešenie predchádzajúcej úlohy, a to tak, že potenciál v rovine, v ktorej leží spoj polosfér je identicky rovný 0. Potom zrejme už len stačí riešiť ten pre nás zaujímavý polpriestor, čiže nám stačí ísť s θ od 0 po $\pi/2$.

V smere rastúceho r, teda máme diskrétne body vzdialené od seba h_r. Derivácia fr v bode prislúchajúcom i, j je

$$[f(i,j)r(i)]' = \frac{f(i+1,j)r(i+1) - f(i,j)r(i)}{h_r}\,,$$

kde sme v podstate len použili definíciu derivácie a vynechali detail, že h by malo byť nekonečne malé. Respektíve, to čo sme napísali je tzv. dopredná derivácia a skôr vystihuje deriváciu f v oblasti medzi i a $i+1$. Je fajn to mať na pamäti. No a teraz druhá derivácia f je derivácia derivácie f. Teraz sa skúsme zamyslieť - namiesto toho aby sme znovu použili doprednú deriváciu, a teda porovnávali deriváciu medzi bodmi i a $i+1$ s deriváciou medzi $i+1$ a $i+2$ (čo už na pohľad veľmi nevyzerá ako zisťovanie druhej derivácie v i), spravíme prezmenu spätnú deriváciu, ktorá symbolicky vyzerá takto: $f'(i) = (f(i) - f(i-1))/h$ (čo je pochopiteľne len prvá derivácia). Ďalej počítame a dosadíme, že $r(i) = ih_r$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(fr) = \frac{1}{r(i)}\frac{[f(i,j)r(i)]' - [(f(i-1,j)r(i-1)]'}{h_r} = \\ = \frac{f(i+1,j)(i+1) - 2f(i,j) + f(i-1,j)(i-1)}{ih_r^2}\,.$$

Obdobne (len trocha zložitejšie) rozdiferencujeme aj druhý člen

$$\frac{1}{r^2(i)\sin\theta(j)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta(j)\frac{\partial f}{\partial\theta(j)}\right) = \\ = \frac{\sin\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)h_\theta\right](f(i,j+1) - f(i,j)) - \sin\left[\left(j-\frac{1}{2}\right)h_\theta\right][f(i,j) - f(i,j-1)]}{\sin(jh_\theta)\,i^2h_r^2h_\theta^2}\,.$$

Člen $\sin\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)h_\theta\right]$ môže pôsobiť trocha zvláštne, ale vyplýva práve z toho, že chceme hodnotu derivácie „presne" medzi j a $j+1$.

Zostáva nám položiť súčet týchto dvoch členov rovný 0 a vyjadriť

$$f(i,j) = \frac{\sin(jh_\theta)\,ih_\theta^2\,[f(i-1,j)\,(i-1) + f(i+1,j)\,(i+1)]}{2i^2h_\theta^2\sin(jh_\theta) + \sin\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)h_\theta\right] + \sin\left[\left(j-\frac{1}{2}\right)h_\theta\right]} + \\ + \frac{f(i,j-1)\sin\left[\left(j-\frac{1}{2}\right)h_\theta\right] + \sin\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)h_\theta\right]f(i,j+1)}{2i^2h_\theta^2\sin(jh_\theta) + \sin\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)h_\theta\right] + \sin\left[\left(j-\frac{1}{2}\right)h_\theta\right]}\,.$$

Toto platí pre potenciál vo všetkých bodoch, okrem tých, v ktorých je nejaký náboj. Také body sú napríklad samotné pologule, na ktorých máme ale potenciál zadaný, a teda sú to naše okrajové podmienky.

Priestor si zdiskretizujeme na mriežku a ďalej budeme postupne prechádzať jej body a v každom zrátame daný výraz. Potom znova a znova, až dokým nám to nedokonverguje. Prikladáme kód v Pythone.

```
import numpy as np
Fi=np.zeros((101,101))
Fi2=np.zeros((101,101))
h=np.pi/200
b=True
eps=10**(-3)
F=100
while b:
   b=False
   for i in range(101):
     for j in range(101):
       if (i==100):
         Fi2[i,j]=F
       elif (i==0):
         Fi2[i,j]=0
       elif (j==100):
         Fi2[i,j]=0
       elif (j==0):
         Fi2[i,j]=(np.sin(j*h)*i*h*h*(Fi[i-1,j]*(i-1)+Fi[i+1,j]*(i+1))
+2*np.sin((j+0.5)*h)*Fi[i,j+1])/(2*i*i*h*h*np.sin(j*h)+2*np.sin((j+0.5)*h))
         if abs(Fi2[i,j]-Fi[i,j])>eps:
           b=True
       else:
         Fi2[i,j]=(np.sin(j*h)*i*h*h*(Fi[i-1,j]*(i-1)+Fi[i+1,j]*(i+1))+
Fi[i,j-1]*np.sin((j-0.5)*h)+np.sin((j+0.5)*h)*Fi[i,j+1])/
(2*i*i*h*h*np.sin(j*h)+np.sin((j+0.5)*h)+np.sin((j-0.5)*h))
         if abs(Fi2[i,j]-Fi[i,j])>eps:
           b=True
   for x in range(101):
     for y in range(101):
       Fi[x,y]=Fi2[x,y]
print(Fi[50,100])
```

Výsledok je po zaokrúhlení 66 V.

Analytické řešení

Vyjdeme z obecného řešení Laplaceovy rovnice $\Delta\Phi = 0$ ve sférických souřadnicích

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(A_{ml}r^l + B_{lm}r^{-l-1}\right)Y_{lm}(\theta,\varphi)\,,$$

kde $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ jsou sférické harmoniky a A_{ml} a B_{ml} jsou konstanty, které je třeba určit z počátečních podmínek. Souřadnice zvolíme tak, že polopřímka $\theta = 0$ prochází vrcholem jedné poloslupky. V takovém případě souřadnice φ vystihuje azimutální symetrii problému a potenciál na ní vůbec nebude záviset. V sumě proto musejí zbýt pouze členy s $m = 0$ a řešení s azimutální symetrií můžeme psát ve tvaru

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + B_l r^{-l-1}\right)P_l(\cos\theta)\,,$$

kde $P_l(x)$ jsou Legendrovy polynomy. Hledáme potenciál pouze uvnitř koule o poloměru R a požadujeme, aby ve středu $r = 0$ nedivergoval, proto musí platit $B_l = 0$ pro všechna l. Problém se nám zjednodušil na

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l P_l(\cos\theta)\,. \tag{7}$$

Potenciál V je specifikovaný na slupce $r = R$, což vede na

$$V(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}A_l R^l P_l(\cos\theta) = \begin{cases}U_0 & \theta\in\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right)\\ -U_0 & \theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right\rangle\,.\end{cases} \tag{8}$$

Naším cílem je najít konstanty A_l takové, aby tato rovnice platila pro všechna $\theta\in\langle 0,\pi\rangle$. K tomu využijeme ortogonalitu Legendrových polynomů danou vztahem

$$\int_{-1}^{1}P_l(x)P_k(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1}\delta_{lk}\,.$$

Rovnici (8) vynásobíme $P_k(\cos\theta)$ a přeintegrujeme, čímž dostáváme

$$\frac{2A_l R^l}{2l+1} = \int_{-1}^{1}V(\theta)P_l(\cos\theta)\,\mathrm{d}\cos\theta\,,$$

$$A_l = \frac{2l+1}{2R^l}\int_0^{\pi}V(\theta)P_l(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,. \tag{9}$$

Následně spočítáme integrál

$$\int_0^{\pi}V(\theta)P_l(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_{-1}^{0}\left(-U_0\right)P_l(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 U_0 P_l(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= U_0\left(-\int_0^1 P_l(-x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 P_l(x)\,\mathrm{d}x\right) = U_0\left(1-(-1)^l\right)\int_0^1 P_l(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{10}$$

Pro sudé l platí $A_l = 0$ a pro liché l musíme integrál spočítat. K tomu použijeme několik vlastností Legendrových polynomů, konkrétně znalost hodnot na krajích integračního intervalu $P_l(1) = 1$, $P_l(0) = \frac{(-1)^{\frac{l}{2}}}{2^l}\binom{l}{\frac{l}{2}}$ pro sudé l a integrální vzorec pro Legendrovy polynomy

$$\int P_l(x) = \frac{P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)}{2l+1}\,.$$

S využitím těchto vlastností dostáváme

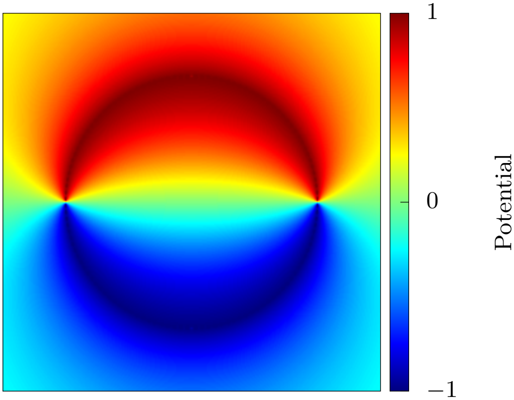
$$\begin{aligned}\int_0^1 P_l(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{P_{l+1}(1) - P_{l-1}(1)}{2l+1} - \frac{P_{l+1}(0) - P_{l-1}(0)}{2l+1} = \\ &= -\frac{1}{2l+1}\left(\frac{(-1)^{\frac{l+1}{2}}}{2^{l+1}}\binom{l+1}{\frac{l+1}{2}} - \frac{(-1)^{\frac{l-1}{2}}}{2^{l-1}}\binom{l-1}{\frac{l-1}{2}}\right) = \\ &= \frac{(-1)^{\frac{l-1}{2}}}{(2l+1)2^{l-1}}\left(\frac{1}{2^2}\binom{l+1}{\frac{l+1}{2}} + \binom{l-1}{\frac{l-1}{2}}\right) = \\ &= \frac{(-1)^{\frac{l-1}{2}}}{2^{l+1}}\frac{(l-1)(l+1)(l-2)!}{\left(\left(\frac{l+1}{2}\right)!\right)^2} = \frac{(-1)^{\frac{l-1}{2}}}{2^{l+1}l}\binom{l+1}{\frac{l+1}{2}}\,.\end{aligned}$$

Tento výsledek nyní dosadíme do (10) a posléze do (9) a (7), čímž dostaneme explicitní vyjádření potenciálu uvnitř koule pomocí Legendrových polynomů jako

$$\begin{aligned}\Phi(r,\theta) &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2R^l}U_0\left(1-(-1)^l\right)\frac{(-1)^{\frac{l-1}{2}}}{2^{l+1}l}\binom{l+1}{\frac{l+1}{2}}r^l P_l(\cos\theta) \\ &= U_0\sum_{l\ \text{liché}}\frac{(-1)^{\frac{l-1}{2}}(2l+1)}{2^{l+1}l}\binom{l+1}{\frac{l+1}{2}}\frac{r^l}{R^l}P_l(\cos\theta) \\ &= U_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+2}}\frac{4n+3}{2n+1}\binom{2n+2}{n+1}\frac{r^{2n+1}}{R^{2n+1}}P_{2n+1}(\cos\theta) \\ &= U_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(4n+3)}{2^{2n+1}(n+1)}\binom{2n}{n}\frac{r^{2n+1}}{R^{2n+1}}P_{2n+1}(\cos\theta)\,.\end{aligned}$$

Nyní dosadíme polohu hledaného bodu $\theta = 0$, $r = \frac{R}{2}$ a získáme

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{R}{2},0\right) &= U_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}\frac{4n+3}{n+1}\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n+1}} \\ &= U_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{2n+1}}\frac{4n+3}{n+1}\binom{2n}{n} \\ &= U_0\left(2-\frac{3}{\sqrt{5}}\right) \doteq 0{,}658\,U_0\,.\end{aligned}$$



Obr. 1: Vizualiazace hledaného potenciálu (normováno).

V polovině cesty od středu koule ke kladně nabitému vrcholu polosféry bude tedy potenciál $\Phi \doteq 66\,\mathrm{V}$. Pro přesnost na dvě platné cifry je postačující vyčíslit jen první tři členy rozvoje.

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha M.1 ... na nádraží

3 body

Legolas utíkal na vlak rychlostí $v = 3{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, když si najednou všiml, že má rozvázanou tkaničku. Tak se zastavil, po dobu $t = 10{,}0\,\mathrm{s}$ si ji zavazoval a až potom nastoupil na eskalátor pohybující se rychlostí $u = 1{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (na kterém samozřejmě zase běžel rychlostí v, neboť spěchal). Vtom se plácnul do čela – kdyby byl udělal ten jeden krok navíc a tkaničku si zavázal až na eskalátoru, ušetřil by nějaký čas. Ale kolik přesně?

Konkrétní délku eskalátoru znát nepotřebujete, stačí, že je dost dlouhý na to, aby si na něm Legolas stihl tkaničku zavázat. *Lego zmeškal vlak.*

Zaujíma nás rozdiel trvania dvoch dejov. Prvý vyzerá tak, že Legolas sa najprv po dobu t nehýbe, a potom prejde eskalátor rýchlosťou $u + v$. Druhý vyzerá tak, že najprv po dobu t ide po eskalátore rýchlosťou u, a potom prejde zvyšok eskalátora rýchlosťou $u + v$. (Zo zadania vyplýva, že ten zvyšok je nezáporný.)

Samotné prejdenie toho zvyšku je zrejme v oboch prípadoch rovnaké. Bude nás teda zaujímať časový rozdiel v bode, keď na eskalátore dokončí zaväzovanie šnúrok. Čiže v bode vzdialenom $l = ut$ od začiatku eskalátoru.

Pri druhom deji sa do tohto bodu dostane za čas t. Pri prvom deji sa najprv čas t nehýbe a potom prejde vzdialenosť l za čas

$$t_l = \frac{l}{u+v} = t\frac{u}{u+v}\,.$$

Čiže hľadaný časový rozdiel je

$$\Delta t = (t + t_l) - t = t_l = t\frac{u}{u+v} = 2{,}5\,\mathrm{s}\,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha M.2 ... na letišti

3 body

Dano a Danka spěchají na letadlo do Mexika, a tak oba utíkají po posuvném pásu (ve směru jeho pohybu). Oba mají stejný, přesně $1\,\mathrm{m}$ *dlouhý krok. Dano utíká dvakrát rychleji než Danka a potřebuje udělat 28 kroků na přeběhnutí pásu, zatímco Dance jich stačí jen 21. Kolik metrů měří posuvný pás?*

Legolas chtěl stihnout letadlo.

Označíme si rýchlosť pásu v a frekvenciu krokov Danky f (tým pádom, keďže dĺžky krokov sú rovnaké, Danova frekvencia bude $2f$). Z pohľadu Dana bude dĺžka pásu $s_{\mathrm{Dano}} + s_{\mathrm{pás}}$, kde s_{Dano} je vzdialenosť, ktorú Dano prešiel po páse, teda $s_{\mathrm{Dano}} = 28\,\mathrm{m}$, a $s_{\mathrm{pás}}$ vzdialenosť, ktorú prešiel pás počas toho, kým na ňom Dano stál. Dano strávil na páse čas $28/(2f)$, čiže dĺžka pásu je $s_{\mathrm{Dano}} + 14v/f$. Rovnakým spôsobom pre Danku dostávame dĺžku pásu ako $s_{\mathrm{Danka}} + 21v/f$, kde $s_{\mathrm{Danka}} = 21\,\mathrm{m}$. Porovnaním týchto vzťahov získame $v/f = 1\,\mathrm{m}$ a následným dosadením (do ktoréhokoľvek vyjadrenia) dostaneme dĺžku pásu $42{,}0\,\mathrm{m}$.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha M.3 ... v metru

3 body

Matěj rád jezdí metrem. Jednou vystoupil na stanici, která byla v hloubce $h = 50\,\mathrm{m}$ *pod zemí. Vyšel nahoru rychlostí* $v = 1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ *po eskalátoru, který se pohybuje nahoru rychlostí* $u = 1{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$*. Jakou práci přitom vykonal? Uvažujme, že jeho hmotnost je* $m = 60\,\mathrm{kg}$*.*

Matěje fascinují eskalátory (i metro).

Celkem byla vykonána práce $W = mgh$. Část z ní vykonal Matěj tím, že šel, a zbytek vykonaly jezdící schody. Jelikož je práce přímo úměrná h, rozdělí se v poměru výškových vzdáleností, které chodec a schody překonaly. Protože je směr jejich rychlostí stejný, výškové vzdálenosti budou přímo úměrné těmto rychlostem. Potom výška, kterou urazil chodec vlastními silami, bude

$$h_{\mathrm{b}} = h\frac{v}{v+u}\,,$$

zatímco schody ho vynesly do výšky

$$h_{\mathrm{s}} = h\frac{u}{v+u}\,.$$

Nyní už můžeme spočítat výslednou práci, kterou Matěj vykonal

$$W_\mathrm{b} = mgh_\mathrm{b} = mgh\frac{v}{v+u} \doteq 11\,800\,\mathrm{J}\,.$$

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha M.4 ... v nákupním centru 3 body

Cestovali jste vlakem, metrem a letadlem, abyste mohli navštívit nákupní centrum, které je samozřejmě vybaveno eskalátory. Na zapnutém eskalátoru jedoucím nahoru trvá cestujícímu vyjít nahoru a zase dolů $t_\mathrm{z} = 50\,\mathrm{s}$, na vypnutém $t_\mathrm{v} = 30\,\mathrm{s}$. Jaká je rychlost pohybu schodů zapnutého eskalátoru, když po nich cestující jde směrem nahoru rychlostí $v_\mathrm{h} = 1{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a dolů $v_\mathrm{d} = 2{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$? *Legolas běhá po eskalátorech v metru.*

Vieme zistiť dĺžku eskalátora z prípadu, keď je vypnutý, keďže vtedy ho cestujúci celý prejde raz hore a raz dole

$$t_\mathrm{v} = \frac{l}{v_\mathrm{h}} + \frac{l}{v_\mathrm{d}} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{t_\mathrm{v} v_\mathrm{h} v_\mathrm{d}}{v_\mathrm{h} + v_\mathrm{d}}\,.$$

Pre zapnutý eskalátor, ktorého rýchlosť označíme u, platí

$$t_\mathrm{z} = \frac{l}{v_\mathrm{h} + u} + \frac{l}{v_\mathrm{d} - u} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{t_\mathrm{z}}{v_\mathrm{h} + v_\mathrm{d}}\left(v_\mathrm{h} + u\right)\left(v_\mathrm{d} - u\right)\,.$$

Môžeme teda zostaviť rovnicu

$$\begin{aligned}
\frac{t_\mathrm{z}}{v_\mathrm{h} + v_\mathrm{d}}\left(v_\mathrm{h} + u\right)\left(v_\mathrm{d} - u\right) &= \frac{t_\mathrm{v} v_\mathrm{h} v_\mathrm{d}}{v_\mathrm{h} + v_\mathrm{d}}\,,\\
v_\mathrm{h} v_\mathrm{d} + u\left(v_\mathrm{d} - v_\mathrm{h}\right) - u^2 &= \frac{t_\mathrm{v} v_\mathrm{h} v_\mathrm{d}}{t_\mathrm{z}}\,,\\
u^2 - \left(v_\mathrm{d} - v_\mathrm{h}\right) u + \left(\frac{t_\mathrm{v}}{t_\mathrm{z}} - 1\right) v_\mathrm{h} v_\mathrm{d} &= 0\,.
\end{aligned}$$

Dostali sme kvadratickú rovnicu pre u, ktorej korene sú

$$u = \frac{v_\mathrm{d} - v_\mathrm{h} \pm \sqrt{(v_\mathrm{d} + v_\mathrm{h})^2 - 4 v_\mathrm{d} v_\mathrm{h} \frac{t_\mathrm{v}}{t_\mathrm{z}}}}{2}\,,$$

kde nás zaujíma koreň s plusom (lebo ten s mínusom je záporný), ktorý je približne $u \doteq 1{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha E.1 ... statistická 1 - úvod 3 body

Ve statistické fyzice můžeme popisovat soubor částic uzavřených v konstantním objemu. Tomu se říká kanonický soubor a pravděpodobnost, že takový systém najdeme ve stavu n, se řídí Boltzmannovým zákonem

$$p_n = \frac{1}{Z} \mathrm{e}^{-\frac{E_n}{k_\mathrm{B} T}}\,,$$

kde E_n je energie systému ve stavu n, $k_\mathrm{B} = 1{,}381 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{m^2{\cdot}kg{\cdot}s^{-2}{\cdot}K^{-1}}$ je Boltzmannova konstanta a T je termodynamická teplota systému. Hodnota Z je přesně taková, aby součet všech pravděpodobností byl roven jedné. Typicky existuje obrovské množství stavů, ve kterém se může systém nacházet, ale v této úvodní úloze budeme pracovat se systémem, který má pouze tři rozlišitelné stavy ($n = 1, 2, 3$) o energiích $E_1 = 1{,}00 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{J}$, $E_2 = 2E_1$ a $E_3 = 3E_1$. Určete hodnotu Z při teplotě $T_0 = 275\,\mathrm{K}$.

Matějovi chyběla statistická fyzika ve FYKOSích úlohách.

Vyjdeme faktu, že součet pravděpodobností je 1, tedy

$$1 = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{Z}\left(\mathrm{e}^{-\frac{E_1}{k_\mathrm{B}T}} + \mathrm{e}^{-\frac{E_2}{k_\mathrm{B}T}} + \mathrm{e}^{-\frac{E_3}{k_\mathrm{B}T}}\right)$$
$$Z = \mathrm{e}^{-\frac{E_1}{k_\mathrm{B}T}} + \mathrm{e}^{-\frac{E_2}{k_\mathrm{B}T}} + \mathrm{e}^{-\frac{E_3}{k_\mathrm{B}T}} \doteq 0{,}077\,4\,.$$

Konkrétní hodnota Z nemá většinou žádný fyzikální význam. Jedná se jenom o normalizační konstantu, fyzikálně relevantní budou až její derivace, což uvidíme v dalších úlohách.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha E.2 ... statistická 2 - základy 3 body

Nyní budeme zkoumat kanonický systém, který má pouze dva různé stavy. Rozdíl energií v obou stavech je přesně $\Delta E = 10^{-20}\,\mathrm{J}$. Můžete si představit například molekulu, která existuje buď v základním nebo excitovaném stavu, ale tento popis funguje pro i zcela obecný systém. S jakou pravděpodobností se systém nachází ve stavu s vyšší energií, je-li teplota systému $T_0 = 275\,\mathrm{K}$?

Poznámka. Využijte znalostí z předchozí úlohy. *Protože úvod nestačil.*

Podle zadání máme pouze dva dostupné stavy s energiemi E_1 a $E_2 = E_1 + \Delta E$. V tomto případě můžeme snadno dosadit všechny (tj. obě) možnosti do podmínky na součet pravděpodobností, takže dostaneme

$$p_1 + p_2 = 1\,,$$
$$\frac{1}{Z}\mathrm{e}^{-\frac{E_1}{k_\mathrm{B}T}} + \frac{1}{Z}\mathrm{e}^{-\frac{E_1+\Delta E}{k_\mathrm{B}T}} = 1\,,$$
$$1 + \mathrm{e}^{-\frac{\Delta E}{k_\mathrm{B}T}} = Z\mathrm{e}^{\frac{E_1}{k_B T}}\,.$$

Dosazením do Boltzmannova zákona dostáváme

$$p_2 = \frac{1}{Z\mathrm{e}^{\frac{E_1}{k_B T}}}\mathrm{e}^{-\frac{\Delta E}{k_B T}} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\Delta E}{k_B T}}}{1 + \mathrm{e}^{-\frac{\Delta E}{k_\mathrm{B}T}}} = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{\frac{\Delta E}{k_\mathrm{B}T}}} \doteq 0{,}067\,0\,.$$

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha E.3 ... statistická 3 - kvantově 4 body

V předchozím příkladu jste museli vyjádřit hodnotu Z, kterou lze spočítat jako

$$Z = \sum_n \mathrm{e}^{-\frac{E_n}{k_\mathrm{B} T}} ,$$

kde suma probíhá přes všechny možné stavy (tj. v minulém příkladu zde byly pouze dva členy), a pak využít Boltzmannův zákon pro výpočet pravděpodobnosti. Funkce Z se označuje jako partiční suma.

Nyní budeme uvažovat složitější systém – kvantový harmonický oscilátor. Ten se může vyskytovat ve spočetně různých stavech. Energie n-tého stavu je $\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$, kde $n \in \mathbb{N}_0$ a $\hbar\omega = 10^{-21}\,\mathrm{J}$ přesně je parametr oscilátoru. Určete s jakou pravděpodobností se oscilátor nachází v základním stavu ($n = 0$). Teplota systému je $T_0 = 275\,\mathrm{K}$.

Nápověda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ *pro $q \in (0, 1)$.* *Tady už konečně začíná zábava.*

Spočteme partiční sumu

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega}{k_\mathrm{B} T}} = \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{2k_\mathrm{B} T}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B} T}}\right)^n = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{2k_\mathrm{B} T}}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B} T}}}$$

a dosadíme ji do Boltzmannova zákona, tedy dostaneme

$$p_0 = \frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B} T}}}{\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{2k_\mathrm{B} T}}} \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{2k_\mathrm{B} T}} = 1-\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B} T}} \doteq 0{,}231\,5 .$$

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha E.4 ... statistická 4 - kvantově znovu 4 body

V předešlé úloze jste spočítali partiční sumu pro harmonický oscilátor s energiemi $\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$, kde $\hbar\omega = 10^{-21}\,\mathrm{J}$. Ze samotné partiční sumy je možné odvodit všechny termodynamické vlastnosti systému. Vězte, že střední hodnotu energie $\overline{E}$ lze spočítat jako

$$\overline{E} = k_\mathrm{B} T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln\left(Z(T)\right) .$$

Určete střední hodnotu energie kvantového harmonického oscilátoru z předešlé úlohy v jednotkách $\hbar\omega$. Teplota systému je $T_0 = 275\,\mathrm{K}$.

V původní úloze se měla počítat druhá parciální derivace, ale to by zřejmě bylo moc těžké.

Výsledek dostaneme zderivováním partiční sumy jako

$$
\begin{aligned}
\overline{E} &= k_\mathrm{B}T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln\left(Z(T)\right) = k_\mathrm{B}T^2 \frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial T} = \\
&= k_\mathrm{B}T^2 \frac{1}{Z} \frac{\frac{\hbar\omega}{2k_\mathrm{B}T^2}\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{2k_\mathrm{B}T}}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}}\right) + \frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T^2}\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}}\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{2k_\mathrm{B}T}}}{\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}}\right)^2} = \\
&= \hbar\omega \frac{\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}}\right) + \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}}}{\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}}\right)} = \frac{1}{2}\hbar\omega \frac{1+\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}}} = \frac{1}{2}\hbar\omega \coth\frac{\hbar\omega}{2k_\mathrm{B}T} \doteq 3{,}819\,7\,\hbar\omega\,.
\end{aligned}
$$

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha X.1 ... silák a závaží — 3 body

Kolikrát větší silou musí působit biceps, aby udržel závaží o hmotnosti $m = 10\,\mathrm{kg}$ na konci tyče dlouhé $d = 1{,}0\,\mathrm{m}$ v porovnaní s tím, když toto závaží držíme přímo v ruce? Uvažujte délku předloktí $l = 30\,\mathrm{cm}$. Tyč má malou hmotnost a v ruce ji držíme tak, že „prodlužuje“ naše předloktí. *Dodo nesl pánev plnou vody.*

Silu, ktorou musí biceps pôsobiť, môžeme určiť z rovnováhy na páke, kde bod otáčania je lakťový kĺb. Zmenou umiestnenia závažia meníme dĺžku ramena, na ktorom sila pôsobí. Pre podiel síl máme teda jednoducho

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{l+d}{l} \doteq 4{,}3\,.$$

Jozef Lipták
liptak.j@fykos.cz

Úloha X.2 ... (ne)dýchame — 3 body

Člověku se v plicích vymění asi $V = 11\,000\,\mathrm{l}$ vzduchu za den. Jakou průměrnou velikost rychlosti má vzduch proudící hrtanem, když předpokládáme, že má průměr $d = 40\,\mathrm{mm}$? *Dodo a zákeřné dvojky.*

Pri riešení využijeme vzťah pre objemový prietok Q tekutiny

$$Q = Sv\,,$$

kde S je prierez otvoru a v je rýchlosť prúdenia. Prietok určíme z množstva použitého vzduchu. Objem V musí do pľúc za deň vojsť aj výjsť. Prietok nosom je teda $Q = 2V/1\,\mathrm{den}$. Pre prierez hrtanu máme

$$S = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2\,.$$

Vyjadrením rýchlosti a dosadením za prierez a prietok dostávame

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{8V}{\pi d^2 \cdot 1\,\mathrm{den}} \doteq 0{,}20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Jozef Lipták
liptak.j@fykos.cz

Úloha X.3 ... tlak baletky

3 body

Jaký tlak působí na kost v posledním článku palce na noze baletky o hmotnosti $m = 50\,\mathrm{kg}$, po tom, co dopadne jen na tento palec po skoku do výšky $h = 0{,}5\,\mathrm{m}$? Tato kost má v nejužším místě průměr $d = 1{,}3\,\mathrm{cm}$. Předpokládejte, že baletka brzdí dopad konstantní silou po dobu $t = 0{,}5\,\mathrm{s}$.

Dodo se postavil na palec u nohy.

Tlak určíme z definičného vzťahu ako podiel sily a prierezu kosti ako

$$p = \frac{F}{S} = \frac{4F}{\pi d^2}\,.$$

Tlaková sila, ktorá na kosť pôsobí, je daná súčtom tiaže baletky mg a brzdnej sily, ktorej veľkosť určíme z prvej impulzovej vety ako

$$F_\mathrm{d} = \frac{mv}{t} = \frac{m\sqrt{2gh}}{t}\,,$$

kde sme dosadili rýchlosť dopadu pre voľný pád.

Ak vzťahy pre silu dosadíme do rovnice pre tlak, dostávame

$$p = \frac{4\left(mg + \frac{m\sqrt{2gh}}{t}\right)}{\pi d^2} \doteq 6{,}06\,\mathrm{MPa}\,.$$

Jozef Lipták
liptak.j@fykos.cz

Úloha X.4 ... sliny

3 body

Fykosáci jsou velmi šikovní a dokázali vyrobit 100 g *látky takové, že* 99 % *její hmotnosti tvořila voda. Bohužel se z tohoto vzorku po čase trocha vody odpařila a nyní je v něm zastoupena pouze z* 98 %. *Jaká je současná hmotnost vzorku?* *Lego má rád Vsauce2.*

Kľúčové je uvedomiť si, že hmotnosť tuhej časti sa zachováva, a vieme si ju jednoducho spočítať. Na začiatku tvorí $100\,\% - 99\,\% = 1\,\%$ z celkovej hmotnosti. Nakoľko pôvodná vzorka vážila 100 g, tuhá časť váži $100\,\mathrm{g} \cdot 1\,\% = 1\,\mathrm{g}$.

Po tom ako vzorka uschla, už tvorí tuhá časť $100\,\% - 98\,\% = 2\,\%$ z celkovej hmotnosti. Celá vzorka teda musí vážiť $1\,\mathrm{g}/2\,\% = 50\,\mathrm{g}$.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `https://fykos.cz`
e-mail: `fykos@fykos.cz`

FYKOS je také na Facebooku
http://www.facebook.com/FYKOS

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte `http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/`.