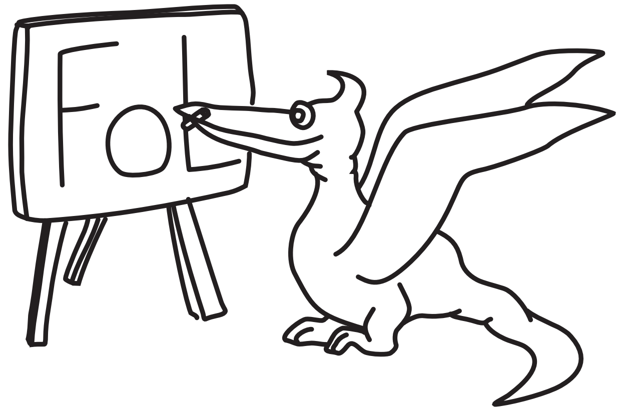
Řešení úloh 9. ročníku Fyziklání online



Úloha FoL.1 ... nenápadný eskalátor

3 body

Pokud se schody eskalátoru pohybují rychlostí $v = 4{,}0\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, o kolik procent se od této rychlosti může maximálně lišit rychlost pásu, jehož se cestující přidržují, aby cestující nepoznali rozdíl v rychlosti eskalátoru a pásu? Eskalátor je dlouhý $d = 30\,\mathrm{m}$ a cestující nepoznají, pokud se jim ruka v rámci celé jízdy pohne méně než o $\Delta x = 5\,\mathrm{cm}$.

Karel se inspiroval Dodovým modelem, který vyvrátil touto úlohou.

Rychlost eskalátoru je $v = 1{,}11\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Schody tak člověk vyjede za $t = d/v = 27\,\mathrm{s}$. Takže rozdíl rychlosti schodů od rychlosti pásu musí být max $\Delta v = \Delta x/t = \Delta x \cdot v/d \doteq 0{,}0018\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq \doteq 0{,}0066\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Rychlost pásu se od rychlosti schodů smí lišit jenom o $0{,}17\,\%$. Je zajímavé, že tento výsledek vůbec nezávisí na rychlosti v. Zajímáme se totiž jenom o relativní rychlost.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha FoL.2 ... dlouhý den

3 body

Jakou rychlostí v uzlech by se musela pohybovat loď plovoucí po rovníku, aby na ní jeden den trval 25 hodin?

24hodinový den je Matějovi příliš krátký.

Země se otočí jednou za 24 hodin. Za 25 pozemských dní (tj $t = 25 \cdot 24\,\mathrm{h}$) tedy pasažéři na lodi zažijí pouze 24 lodních dní (tj $t = 24 \cdot 25\,\mathrm{h}$). To odpovídá přesně jednomu objetí Země kolem dokola. Označíme-li R poloměr Země, rychlost lodi tedy je $v = 2\pi R/t = 18{,}5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = 36\,\mathrm{kt}$.

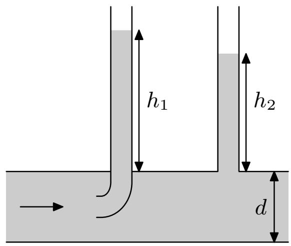
Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha FoL.3 ... dvě trubice

3 body

Ve vodorovném potrubí o průměru $d = 10\,\mathrm{cm}$ proudí bez tření voda. K potrubí jsou svrchu svisle připojeny dvě trubičky. Jedna je ústím obrácená proti proudu, takže se v ní voda zastaví. Druhá trubice je pouze napojena na stěnu potrubí ústím rovnoběžně s proudem. V první trubici vystoupala voda do výšky $h_1 = 30{,}0\,\mathrm{cm}$, zatímco ve druhé trubici vystoupala voda pouze do výšky $h_2 = 25{,}0\,\mathrm{cm}$. Jakou rychlostí proudí voda v potrubí?

Jindra v letním období sucha blouznil o vodě.



Při řešení vyjdeme z Bernoulliho rovnice. Veličiny týkající se první trubice značíme dolním indexem 1 a veličiny týkající se druhé trubice značíme dolním indexem 2.

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\varrho v_2^2\,.$$

Přitom však $v_1 = 0$ a v_2 je rychlost proudění v potrubí. Velikosti tlaků p_1 a p_2 určují, do jaké výšky vystoupá hladina v trubičkách.

$$\varrho g h_1 = \varrho g h_2 + \frac{1}{2}\varrho v_2^2$$
$$v_2 = \sqrt{2g(h_2 - h_1)}$$
$$v_2 = 0{,}99\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

Rychlost proudění v trubici je $0{,}99\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.
Na stejném principu pracuje Pitotova trubice používaná k měření rychlosti letadel.

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Úloha FoL.4 ... ztracené teplo 3 body

V kalorimetru se nachází $0{,}50\,\mathrm{kg}$ *vody o teplotě* $t_1 = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$*. Přilejeme do kalorimetru* $0{,}50\,\mathrm{kg}$ *vody o teplotě* $t_2 = 80\,^{\circ}\mathrm{C}$*. Po vyrovnání teplot má voda v kalorimetru teplotu* $t_3 = 45\,^{\circ}\mathrm{C}$*. Určete tepelnou kapacitu kalorimetru. Kalorimetr nevyměňuje teplo s okolím.*

Jindra se divil, kam se ztrácí teplo z látek v kalorimetru.

Horká voda přilitá do kalorimetru předá teplo jednak na ohřátí studené vody a jednak na ohřátí kalorimetru. Měrná tepelná kapacita vody je $c = 4180\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$ a předpokládejme, že se s teplotou nemění (mezi $20\,^{\circ}\mathrm{C}$ a $80\,^{\circ}\mathrm{C}$ se mění až třetí platná číslice). Označme C tepelnou kapacitu kalorimetru. Pak platí

$$cm_2(t_2 - t_3) = cm_1(t_3 - t_1) + C(t_3 - t_1)\,,$$
$$C = cm_2\frac{t_2 - t_3}{t_3 - t_1} - cm_1\,,$$
$$C \doteq 836\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}}\,.$$

Tepelná kapacita kalorimetru je $836\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}}$.

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Úloha FoL.5 ... stovka 3 body

Jindru by zajímalo, jaké teplo musí dodat kostce ledu o hmotnosti $1{,}0\,\mathrm{kg}$ *a teplotě* $0{,}0\,^{\circ}\mathrm{C}$*, aby ji při atmosférickém tlaku přeměnil na páru o teplotě* $100{,}0\,^{\circ}\mathrm{C}$*. Uvažujte, že měrná tepelná kapacita vody se s teplotou nemění a je rovná* $1\,\mathrm{kcal{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$*. Další potřebné konstanty si vyhledejte.*

Jindra si objednal v restauraci vařený led.

Teplo se spotřebuje na skupenskou přeměnu ledu na vodu, na ohřátí vody z $0{,}0\,^{\circ}\mathrm{C}$ na $100{,}0\,^{\circ}\mathrm{C}$ a na skupenskou přeměnu vody na páru, platí tedy rovnice

$$Q = l_\mathrm{t} m + cm\Delta t + l_\mathrm{v} m\,.$$

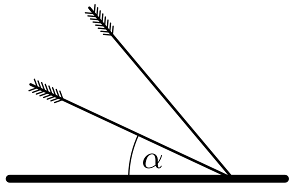
Skupenské teplo tání vody je $3{,}337 \cdot 10^5\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}}$ a skupenské teplo varu je $2{,}256 \cdot 10^6\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}}$. Kilokalorie (kcal) je stará jednotka pro měření tepla (energie) a platí $1\,\mathrm{kcal} \doteq 4\,184\,\mathrm{J}$. Teplo, které musíme ledu dodat, vychází $Q \doteq 3{,}01 \cdot 10^3\,\mathrm{kJ}$.

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha FoL.6 ... lukostřelec

4 body

Lukostřelec střílí z jednoho místa na vodorovné rovině. Dva šípy se mu podařilo zabodnout téměř do stejného bodu na zemi pod různými úhly. (Směr šípu je počas letu stejný jako směr jeho rychlosti a při zabodnutí se nezmění.) Jeden ze šípů svírá se zemí úhel $\alpha = 25{,}00^\circ$. Jaký úhel svírá druhý šíp, jestliže oba dva natáhl při výstřelu stejnou silou? *Matěj střílel lukem.*



Zdá se, že máme zadáno příliš málo parametrů. Neznáme rychlost výstřelu ani vzdálenost lukostřelce od místa dopadu. Ukáže se však, že to nebudeme potřebovat.

Trajektorii šípů můžeme řešit retrospektivně, tedy že oba šípy byly vystřeleny z místa dopadu obecnou rychlostí v. První šíp byl vystřelen pod úhlem α vůči zemi. Ze vztahů pro šikmý vrh vyplývá, že dopadne za čas

$$t = \frac{2v\sin\alpha}{g}\,,$$

přičemž dopadne do vodorovné vzdálenosti

$$s_1 = \cos\alpha vt = \frac{2v^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha\,.$$

Označíme-li úhel dopadu druhého šípu β, dopadne tento šíp analogicky do vzdálenosti

$$s_2 = \frac{2v^2}{g}\sin\beta\cos\beta\,.$$

Jelikož je lučištník vystřelil ze stejného místa, musí být tyto vzdálenosti rovny

$$\begin{aligned} s_1 &= s_2\,,\\ \frac{2v^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha &= \frac{2v^2}{g}\sin\beta\cos\beta\,,\\ \sin\alpha\cos\alpha &= \sin\beta\cos\beta\,,\\ \sin 2\alpha &= \sin 2\beta\,,\end{aligned}$$

poslední rovnice má řešení i pro $\beta \neq \alpha$, protože sinus není prostá funkce. Vzhledem k povaze lukostřelby hledáme řešení v intervalu $(0^\circ, 90^\circ)$. Úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} \cos\left(2\alpha - 90^\circ\right) &= \cos\left(90^\circ - 2\beta\right)\,,\\ 2\alpha - 90^\circ &= 90^\circ - 2\beta\,,\\ \beta &= \frac{1}{2}\left(180^\circ - 2\alpha\right) = 90^\circ - \alpha = 65{,}00^\circ\,.\end{aligned}$$

Vidíme, že oba směry dopadu obou šípů jsou symetrické vzhledem k úhlu 45°. Je zajímavé, že výsledek nezáleží na tíhovém zrychlení g, a proto bychom stejný výsledek dostali, i kdyby se lukostřelec nacházel na jiné planetě.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha FoL.7 ... zvláštní zatmění

4 body

Úplné zatmění Slunce může na zemském povrchu trvat nejdéle $t = 449\,\mathrm{s}$, přičemž má pás zatmění (stín Slunce) délku $d = 267\,\mathrm{km}$. Určete maximální dobu trvání úplného zatmění pro pasažéra letadla letícího rychlostí $v = 903\,\mathrm{km/h}$. Výšku letadla nad povrchem zanedbejte.

Dodo sní o cestě do Argentiny.

Z dĺžky tieňa a doby zatmenia určíme rýchlosť pohybu tieňa po povrchu ako $u = d/t$. Dobu trvania zatmenia T pre pasažiera lietadla potom získame ako

$$T = \frac{d}{u - v} = t\frac{d}{d - vt} = t\frac{1}{1 - \frac{vt}{d}} = 777\,\mathrm{s}\,.$$

Zatmenie bude pasažier vidieť takmer 13 minút.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha FoL.8 ... neuvažujte kauzalitu

4 body

Alžběta měla s Johannem dceru Šarlotu. Šarlotě se však stala neobvyklá věc. Cestovala zpět časem do minulosti, kde vyrostla a vzala si za muže Petra. S Petrem pak měla dceru Alžbětu, což je zároveň i její matka. Vznikl tak časový paradox, kde existence Šarloty je způsobena existencí Alžběty a naopak, bez toho, aniž by jejich existence někdy měla počátek. Předpokládejte, že každé dítě zdědí přesně polovinu genetické informace po svém otci a polovinu po matce. Kolik procent Alžbětiny genetické informace pochází původně od Petrovy? Johann není s Petrem geneticky příbuzný.

Matěj se díval na seriál, jehož jméno vám nepovím, jinak by to byl spoiler.

Genetickou informaci každého člena rodiny označme počátečním písmenem jeho jména. V souladu s předpokladem v zadání můžeme psát

$$A = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}S\,,$$
$$S = \frac{1}{2}J + \frac{1}{2}A\,,$$

což je soustava rovnic se čtyřmi neznámými. Vyjádříme z ní A

$$A = \frac{1}{3}J + \frac{2}{3}P\,.$$

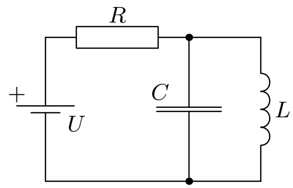
Alžběta tedy nese 66,7 % Petrovy genetické informace.

V této úloze jsme ignorovali, že fyzikálně vůbec nedává smysl, protože všechny dosavadní poznatky ukazují na to, že cestování dozadu v čase je samozřejmě nemožné.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha FoL.9 ... RLC sranda 4 body

Uvažujme obvod na obrázku skládající se z ideální cívky o indukčnosti $L = 10{,}0\,\mathrm{mH}$, kondenzátoru o kapacitě $C = 4{,}70\,\mathrm{\mu F}$, rezistoru o odporu $R = 1{,}00\,\mathrm{k\Omega}$ a ideálního zdroje stejnosměrného napětí $U = 230\,\mathrm{V}$. Určete činný výkon na rezistoru R v ustáleném stavu. V České republice má síťové napětí frekvenci $f = 50\,\mathrm{Hz}$. Dodo chce být zákeřný.



Zdroj je **jednosmerný**, teda cievka sa po ustálení obvodu bude správať ako vodič a kondenzátor ako „diera“ v obvode. Ostane nám iba rezistor pripojený na zdroj. Výkon na rezistore určíme ako

$$P = UI = \frac{U^2}{R} = 52{,}9\,\mathrm{W}\,,$$

čo je približne výkon štandardnej žiarovky.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha FoL.10 ... nefér závod 4 body

Martin s Ivanem si dali závod na druhou stranu kopce. Oba uběhli stejnou horizontální vzdálenost $x = 60\,\mathrm{m}$. Ivan ovšem běžel přes kopec, který lze popsat jako část kružnice s poloměrem $r = 50\,\mathrm{m}$. Martin běžel skrz kopec chodbou, jejíž podlaha je tvořena nakloněnou rovinou svírající s vodorovným směrem úhel $\alpha = 14\,^\circ$. O kolik procent musela být Ivanova průměrná rychlost vyšší než Martinova, jestliže oba běžci dorazili současně na konec chodby na druhé straně kopce? Martinovi se nechtělo vybíhat kopec.

Tunel samotný tvoří tětivu oblouku kopce. Je-li l délka tunelu, pak pro středový úhel φ mezi počátečním a koncovým bodem tunelu musí platit

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{l}{2r}\,.$$

Délka odpovídajícího kruhového oblouku s je pak

$$s = r\varphi = 2r\arcsin\left(\frac{l}{2r}\right).$$

Přičemž délka tunelu je

$$l = \frac{x}{\cos\alpha}\,.$$

Poměr rychlostí obou běžců pak je

$$\frac{v_I}{v_M} = \frac{s}{l} = \frac{2r\cos\alpha}{x}\arcsin\left(\frac{x}{2r\cos\alpha}\right).$$

Pro zadané hodnoty je $v_I/v_M \approx 1{,}078$.
Ivanova průměrná rychlost tedy musí být vyšší o přibližně $7{,}8\,\%$.

Martin Vaněk
`martin@fykos.cz`

Úloha FoL.11 ... Humber Bridge

3 body

Humber Bridge, který vede přes řeku Humber v Anglii, patří k největším visutým mostům na světě. Tvoří jej dvě 155,5 m vysoké věže (měřeno od hladiny řeky), jejichž paty jsou od sebe vzdáleny 1410 m (euklidovská vzdálenost, nikoliv vzdálenost po povrchu). Mezi věžemi jsou napnutá lana držící cestu. Přestože jsou obě věže vertikální, jejich vrcholy jsou od sebe vzdáleny více, než jejich paty. O kolik se tyto (euklidovské) vzdálenosti liší?

Matěj sledoval Toma Scotta.

Zdánlivý spor v zadání má na svědomí zakřivení Země, díky kterému nejsou vertikální věže na různých místech rovnoběžné. Představme si rovnoramenný trojúhelník, jehož vrcholy tvoří paty věží a střed Země. Délky jeho stran jsou $s = 1410\,\mathrm{m}$, $R = 6378\,\mathrm{km}$ a R. Druhý trojúhelník bude tvořen vrcholy věží a středem Země. Délky jeho stran jsou s', $R + h$ a $R + h$, kde s' je vzdálenost vrcholů a h je výška věží. Oba tyto trojúhelníky jsou si zřejmě podobné a snadno dopočítáme

$$s' = s\frac{h+R}{R}\,,$$

$$s' - s = \frac{sh}{R} = 3{,}44\,\mathrm{cm}\,.$$

Vrcholy věží jsou tedy o více než 3 cm vzdálenější než jejich paty. Kdybchom místo absolutních vzdáleností uvažovali vzdálenosti měřené po sféře, došli bychom z podobnosti kruhových výsečí ke stejnému výsledku.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha FoL.12 ... skáčeme

4 body

Jaké úhlové rychlosti musí při skoku dosáhnout krasobruslař pokoušející se skočit čtverný axel, pokud při skoku dosáhne výšky $h = 1\,\mathrm{m}$ nad ledovou plochou? Axel je skok s dopředným odrazem z vnější hrany brusle levé nohy a přistáním na vnější hranu pravé nohy couvajíc.

Dodo sleduje Grand Prix of Figure Skating.

Pri skoku do výšky h strávi krasokorčuliar vo vzduchu čas t určený z rovnice pre pohyb s konštantným zrýchlením

$$h = 1/2g\left(\frac{t}{2}\right)^2\,,$$

z čoho vyjadrením času máme

$$t = \sqrt{\frac{8h}{g}}\,.$$

Počas štvoritého axlu musí korčuliar vykonať štyri a pol obratu, teda celkovo sa otočiť o uhol $\varphi = 9\pi$. Na to je potrebná uhlová rýchlosť

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = 9\pi\sqrt{\frac{g}{8h}} \approx 31{,}3\,\mathrm{s^{-1}}\,.$$

Tento skok sa k 27.11.2019 nikomu nepodarilo na súťaži predviesť, jediný pokus je pripísaný ruskému korčuliarovi Arturovi Dmitrievovi na Rostelecom-cupe.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha FoL.13 ... spider-spider 4 body

Pavouček Péťa je dlouhý 2 cm*, umí tkát vlákna různých tlouštěk, avšak musí tkát vlákno o poloměru alespoň* 50,0 nm*, aby ho bylo schopno udržet. Jaký poloměr by jeho vlákno muselo mít, aby se na ně mohl věšet, i kdyby byl pavouček velký jako lidská bytost. Uvažujte, že by byl dlouhý* 2 m*, přičemž všechny jeho ostatní rozměry by se také úměrně zvětšily, ale jeho hustota zůstala zachována.* *Tomáš se učil matiku.*

Je zřejmé, že pavoukova hmotnost roste se třetí mocninou jeho rozměru (při zachování hustoty). Při n-násobném zvětšení se tedy zvýší síla, kterou zavěšený pavouk lano napíná, n^3-krát. V našem případě $n = 100$. Nosnost lana, resp. vlákna je však přímo úměrná jeho průřezu, to znamená, že roste se druhou mocninou jeho poloměru. Označíme-li m jako poměr požadovaného poloměru vlákna a počátečního poloměru (před zvětšením), dostaneme

$$m^2 = n^3\,,$$

$$m = n^{\frac{3}{2}} = 1000\,.$$

Velký pavouk tedy potřebuje tkát vlákna o poloměru alespoň 50 µm. Když to porovnáme s klasicky používanými lany pro jištění lidí, jejichž průměr se pohybuje v řádech centimetrů, můžeme opravdu docenit, jak neskutečně pevná vlákna dokáží pavouci vytvářet.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha FoL.14 ... je kolonizovatelná? 4 body

Planeta podobná Zemi má hmotnost $M = 7{,}166\cdot 10^{24}$ kg*, což je o trochu víc než Země. Shodou okolností je na této planetě první i druhá kosmická rychlost stejná jako na Zemi. Jaké je gravitační zrychlení na jejím povrchu?* *Matěj se už těší na kolonizaci.*

Všimněme si, že první i druhá kosmická rychlost pro danou planetu závisí pouze na poměru její hmotnosti a poloměru. Pro hmotnost planety platí $M = 1{,}20M_\mathrm{Z}$, kde M_Z je hmotnost Země. Pro poloměr tedy bude platit analogicky $R = 1{,}20R_\mathrm{Z}$ (aby platilo $M/R = M_\mathrm{Z}/R_\mathrm{Z}$). Ze vztahu pro výpočet tíhového zrychlení vidíme, že jej lze snadno vyjádřit jako násobek pozemního gravitačního zrychlení g_Z

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{1{,}2GM_\mathrm{Z}}{(1{,}2)^2R_\mathrm{Z}^2} = \frac{1}{1{,}2}g_\mathrm{z} \doteq 0{,}833\,g_\mathrm{z}\,,$$

kde G je gravitační konstanta. Ačkoliv je planeta hmotnější, je zde pouze 83 % tíhového zrychlení Země.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha FoL.15 ... Danovi shořela věžička. 5 bodů

Jáchymovi se v Minecraftu rozlila láva. Zjednodušme svět na 2D krychlovou síť s délkami hran 1 m*. Lávu můžeme modelovat takto:*

1. *v centrálním krychli má výšku hladiny* 1 m*,*

2. *v jakémkoli bloku, ze kterého se nejde dostat do centrálního přes méně než tři jiné krychle (přecházíme-li pouze přes stěny), má výšku hladiny* 0,
3. *výška hladiny v ostatních blocích je aritmetickým průměrem výšky hladin všech sousedních bloků (opět, bloky sousedí pouze přes stěny).*

Jaký je celkový objem rozlité lávy? *Jáchym vylil lávu na Danovu věžičku v Minecraftu.*

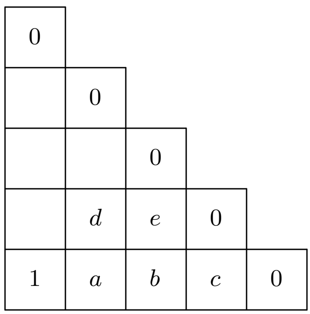
Na obrázku 1 můžeme vidět nákres části situace. Jak vidíme, problém má několik os symetrie, což nám velmi usnadňuje práci. Celkem nám stačí zjistit výšky hladiny v pěti čtvercích, označených a až e. Dostáváme lineární rovnice

$$
\begin{aligned}
4a &= 1 + 2d + b\,,\\
4b &= a + 2e + c\,,\\
4c &= b\,,\\
4d &= 2a + 2e\,,\\
4e &= d + b\,.
\end{aligned}
$$

Jejich řešením je

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{89}{208}\,,\\
b &= \frac{36}{208}\,,\\
c &= \frac{9}{208}\,,\\
d &= \frac{56}{208}\,,\\
e &= \frac{23}{208}\,.
\end{aligned}
$$

Pro výsledný objem platí $V = (1 + 4a + 4b + 4c + 4d + 8e)\mathrm{m}^3 = \frac{72}{13}\,\mathrm{m}^3 \doteq 5{,}54\,\mathrm{m}^3$.



Obr. 1: Nákres části lávy.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FoL.16 ... stovka reloaded
4 body

Jindru by zajímalo, jak velké chyby se dopustil v úloze „stovka“. Tepelná kapacita vody se mění s teplotou. Jindra našel v tabulkách empirický vztah $c_{\mathrm{voda}} = 3{,}1832 \cdot 10^{-6} t^4 - 7{,}7922 \cdot 10^{-4} t^3 + 7{,}5387 \cdot 10^{-2} t^2 - 2{,}9190 t + 4{,}2158 \cdot 10^3$*, kde teplotu t dosazujeme v* $^\circ\mathrm{C}$ *a měrná tepelná kapacita vychází v* $\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$*. O kolik procent se liší hodnota tepla potřebného k ohřátí kapalné vody o hmotnosti* $m = 1{,}00\,\mathrm{kg}$ *z* $0{,}00\,^\circ\mathrm{C}$ *na* $100{,}00\,^\circ\mathrm{C}$*, pokud počítáme s konstantní měrnou tepelnou kapacitou* $c = 4184{,}0\,\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$*, od hodnoty spočítané s pomocí našeho empirického vztahu? Znaménko je důležité (tzn. pokud je hodnota pro konstantní kapacitu menší, očekáváme záporný výsledek).* *Jindra místo vařeného ledu dostal páru.*

Úloha je celkem přímočará, jen je otravné spočítat integrál. Pro konstantní měrnou tepelnou kapacitu vyjde

$$Q_1 = cm\Delta t$$
$$Q_1 = 4{,}1840 \cdot 10^5\ \mathrm{J}\,.$$

Při počítání s proměnlivou tepelnou kapacitou vyjde

$$Q_2 = m \int_0^{100} c(t)\mathrm{d}t$$
$$Q_2 = m \left[\frac{3{,}1832 \cdot 10^{-6}}{5} \cdot t^5 - \frac{7{,}7922 \cdot 10^{-4}}{4} \cdot t^4 + \frac{7{,}5387}{3} \cdot t^3 - \frac{2{,}9190}{2} \cdot t^2 + 4{,}2158 \cdot 10^3 t \right]_0^{100}$$
$$Q_2 = 4{,}1900 \cdot 10^5\ \mathrm{J}\,.$$

Procentuální rozdíl je

$$\delta Q = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_2}$$
$$\delta Q = -0{,}14\,\% \cdot$$

Hodnota $\delta Q = -0{,}14\,\%$ je malá, použití aproximace v úloze „stovka“ tedy bylo v pořádku.

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha FoL.17 ... líný elektron
4 body

Uvažujte Bohrův model atomu vodíku, tedy kladně nabité jádro nábojem $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$*, okolo kterého obíhá opačně nabitý elektron o mnohem menší hmotnosti* $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$*. Jaký by musel být poloměr atomu vodíku, aby jeden oběh elektronu trval jeden den? Nepozastavujte se přitom nad faktem, že ve skutečnosti by se vodík v takovém stavu nemohl nacházet (a nebo mohl…?). Odpověď uveďte v kilometrech.* *Matěj porovnával atom vodíku se zeměkoulí.*

V Bohrově modelu lze vyjít z klasických vztahů pro odstředivou sílu a Columbova zákona

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = m_e \omega^2 r\,,$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \omega^2 m_e}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt[3]{\frac{e^2 T^2}{2\varepsilon_0 m_e}} = 3\,600\,\mathrm{m} = 3{,}6\,\mathrm{km}\,,$$

kde $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1\,\mathrm{d} = 86\,400\,\mathrm{s}$ je doba oběhu, ε_0 je permitivita vakua a r je poloměr atomu.

Pozn. 1: Uvažovali jsme, že jádro atomu je statické. Správně bychom ale měli uvažovat i pohyb jádra okolo středu (těžiště) atomu. Do Columbova vztahu pro sílu by pak bylo třeba dosadit vzdálenost elektronu od jádra a nikoliv od středu

$$r' = r\frac{m_e + M}{M}\,,$$

kde M je hmotnost jádra. Vzhledem k tomu, že jádro má o více než tři řády vyšší hmotnost, ovlivnilo by to výsledek o méně než 1% (korigující faktor by se ve výsledku vyskytoval s mocninou $\frac{2}{3}$).

Pozn. 2: Tiše jsme zamlčeli Bohrovu kvantovací podmínku $L = n\hbar$ (L je celkový moment hybnosti, $\hbar$ je redukovaná Planckova konstanta a n je přirozené číslo). Tato podmínka však kvantuje hlavně velmi malé poloměry (malé momenty hybnosti). Se zvyšujícím se poloměrem roste moment hybnosti $L = m_e\omega r^2 \approx r^{\frac{1}{2}}$ a pro tak extrémní případy, jako v této úloze, dostáváme milion-násobky $\hbar$, pro které lze n považovat za spojité.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha FoL.18 ... náboj v krabičce 4 body

Zlobivý náboj unikl z myšlenéhoválečku, a tak jej Jindra zavřel do krabičky. Krabička má rozměry $8{,}00 \times 8{,}00 \times 4{,}00\,\mathrm{cm}$. *Jindra náboj přilepil do středu čtvercové podstavy. Náboj má velikost* $Q = 1{,}00 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$. *Zajímá nás tok elektrické intenzity protější čtvercovou podstavou.*

Avšak náboje nemají rády Jindru.

Představme si, že ke spodní podstavě s nábojem přilepíme stejnou krabičku. Dvě slepené krabičky nyní tvoří krychli s délkou hrany 8 cm. Každou stěnou prochází 1/6 celkového toku elektrické intenzity, který dostaneme z Gaussova zákona elektrostatiky

$$\varphi_{\mathrm{celk}} = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\,.$$

Tok čtvercovou podstavou naproti přilepenému náboji je tudíž

$$\varphi_{\mathrm{podst}} = \frac{1}{6}\varphi_{\mathrm{celk}} = \frac{1}{6}\frac{Q}{\varepsilon_0}\,,$$
$$\varphi_{\mathrm{podst}} = 1{,}88 \cdot 10^4\,\mathrm{V{\cdot}m}\,.$$

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Úloha FoL.19 ... šroubovice 4 body

Pozitron se pohybuje ve vzdálenosti $R = 10\,\mathrm{cm}$ *od drátu, kterým teče proud* $I = 2{,}5\,\mathrm{A}$. *V důsledku magnetického pole, které vzniká okolo drátu, pozitron kromě rovnoběžného pohybu také*

obíhá okolo drátu. Složka rychlosti pozitronu ve směru proudu je $v = 1{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ *a radiální složka je nulová. Jestliže je pohyb stabilní, určete periodu oběhu pozitronu okolo drátu. Výsledek udávejte v milisekundách.*
Uvažujte kostanty $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N{\cdot}A^{-2}}$, $m_\mathrm{e} = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$. *Už se to točí.*

Dostředivá síla působící na pozitron je Lorentzova síla

$$\boldsymbol{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}\,,$$
$$F = evB(R),$$

kde $B(R)$ je velikost magnetického pole ve vzdálenosti R od drátu. Ta je dána Ampérovým zákonem

$$B(R) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}\,.$$

Dostředivá síla udává úhlovou rychlost pohybu ω

$$F = m_e\omega^2 R\,,$$

kde perioda oběhu T splňuje

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\,.$$

Tím pádem

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m_e R}{F}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_e R}{evB(r)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\pi m_e R^2}{ev\mu_0 I}} = 2\pi R\sqrt{\frac{m_e}{\frac{\mu_0}{2\pi}evI}} \approx 1{,}7\,\mathrm{ms}\,.$$

Štěpán Marek
stepan.marek@fykos.cz

Úloha FoL.20 ... náboj veválečku

6 bodů

Jindrovi se podařilo v myšlenkovém pokusu chytit elektrický náboj $Q = 1{,}00 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$ *do myšleného válečku, který s nábojem nijak neinteraguje. Náboj se vznáší nehnutě uprostřed válečku. Váleček má poloměr* $r = 4{,}00\,\mathrm{cm}$ *a výšku* $v = 6{,}00\,\mathrm{cm}$. *Určete tok elektrické intenzity horní podstavou.* *Jindra má rád náboje.*

Tok elektrické intenzity se spočítá jako

$$\varphi = \int_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\,.$$

Gaussův zákon elektrostatiky říká, že tok elektrické intenzity uzavřenou plochou je přímo úměrný náboji uvnitř plochy.

$$\varphi = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Pokud si představíme kouli opsanou našemu válci, pak je zřejmé, že tok elektrické intenzity horní podstavou válce bude rovný toku elektrické intenzity kulovým vrchlíkem nad podstavou.

Zároveň vektory elektrické intenzity míří všude kolmo na povrch koule a mají stejnou velikost. Povrch kulového vrchlíku je

$$S_{\mathrm{vrch}} = 2\pi hR\,,$$

kde h je výška vrchlíku a R poloměr koule, v našem případě $R = \sqrt{r^2 + (v/2)^2} = 5{,}00\,\mathrm{cm}$ a $h = R - v/2 = 2{,}00\,\mathrm{cm}$. Poměr toku elektrické intenzity vrchlíkem ku toku elektrické intenzity celým povrchem koule je stejný jako poměr ploch, tedy

$$\frac{\varphi_{\mathrm{vrch}}}{\varphi_{\mathrm{koule}}} = \frac{\varphi_{\mathrm{vrch}}}{\frac{Q}{\varepsilon_0}} = \frac{S_{\mathrm{vrch}}}{S_{\mathrm{koule}}} = \frac{h}{2R}\,,$$

$$\varphi_{\mathrm{vrch}} = \frac{h}{2R}\frac{Q}{\varepsilon_0}\,,$$

$$\varphi_{\mathrm{vrch}} = 2{,}26 \cdot 10^4\,\mathrm{V{\cdot}m}\,.$$

Tok elektrické intenzity horní postavouválečku je $\varphi_{\mathrm{vrch}} = 2{,}26 \cdot 10^4\,\mathrm{V{\cdot}m}$.

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Úloha FoL.21 ... africké Slunce 4 body

Mišo se vydal na další vlakové dobrodružství, chce vlakem projet Afriku. Uprostřed září před Nairobi seděl po směru jízdy a uviděl v okně napravo odraz právě vycházejícího Slunce. Vlak se v tom čase pohyboval přesně na jih. Za 10 minut se vlak pohyboval směrem na JJZ. Určete, o jaký úhel (ve stupních) se z Mišova pohledu odraz Slunce vůči vagónu odchýlil od původní polohy. *Dodo se vracel vlakem přes noc.*

Vlak sa voči krajine otočil o uhol zovretý medzi južným a juhojuhozápadným smerom, teda o $\alpha = 22{,}5\,^\circ$. Za ten čas sa ale Slnko s oblohou posunulo. Vzhľadom na to, že sa nachádzame v blízkosti rovníka a blízko rovnodennosti, Slnko vychádza presne na východe a stúpa kolmo na horizont rýchlosťou približne $\omega = 15\,^\circ/\mathrm{h}$, čiže za $10\,\mathrm{min}$ vystúpa o $\beta = 2{,}5\,^\circ$. Tieto dva uhly sú v navzájom kolmých smeroch. Ak pre zjednodušenie použijeme Pythagorovu vetu, celkovo sa Slnko voči vagónu otočilo o uhol

$$\gamma = \sqrt{\beta^2 + \alpha^2} = 22{,}64\,^\circ\,.$$

Správne by sa mala použiť kosínusová veta pre sférický trojuholník, z ktorej by sme dostali výsledok $\gamma = \arccos\left(\cos\alpha\cos\beta\right) = 22{,}63\,^\circ$. Posledným krokom riešenia je uvedomiť si, ako sa tento uhol odrazí v zmene smeru, z ktorého Mišo vidí odraz vo vlaku voči vagónu. Po krátkej úvahe dospejeme k záveru, že je to o práve uhol γ.

Jozef Lipták
liptak.j@fykos.cz

Úloha FoL.22 ... Red hot nickel... cable? 4 body

Přímotop má topné vlákno z niklu s teplotním součinitelem odporu $\alpha = 0{,}0068\,\mathrm{K}^{-1}$ *a odporem* $R_0 = 80\,\Omega$ *při pokojové teplotě* $T_0 = 293\,\mathrm{K}$. *Po zapnutí se vlákno do ruda rozžhaví na teplotu* $T = 1100\,\mathrm{K}$ *díky procházejícímu proudu o velikosti* $I = 2\,\mathrm{A}$. *Jaký je celkový povrch vlákna*

(v $\mathrm{m^2}$), budeme li předpokládat, že vlákno teplo odevzdává pouze zářením (chová se jako černé těleso)?
Jirka už přemýšlí o tom, jak se v zimě zahřát.

Výkon rozžhaveného vlákna vypočítáme jako $P = RI^2$. Tento výkon bude stejný jako zářivý tok vysílaný vláknem $\Phi = \sigma T^4 \cdot S$. Stále však neznáme odpor rozžhaveného vlákna. Ten lze vypočítat pomocí vzorce $R = R_0(1+\alpha\Delta t)$, kde za Δt dosadíme $T - T_0$. Dostáváme tedy rovnici

$$\sigma T^4 \cdot S = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]I^2\,,$$

ze které jednoduše vyjádříme požadované

$$S = \frac{R_0[1 + \alpha(T - T_0)]I^2}{\sigma T^4}\,.$$

Nyní již stačí pouze dosadit číselné hodnoty

$$S = \frac{80\,\Omega[1 + 0{,}0068\,\mathrm{K^{-1}} \cdot (1100\,\mathrm{K} - 293\mathrm{K})] \cdot (2\,\mathrm{A})^2}{5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}} \cdot (1100\,\mathrm{K})^4} = 0{,}025\,\mathrm{m^2}\,.$$

Vlákno tedy má povrch $0{,}025\,\mathrm{m^2}$.

Jiří Blaha
jirka.b@fykos.cz

Úloha FoL.23 ... ve visu

5 bodů

Mezi dvěma zdmi ve vzdálenosti $2l$ napněme horizontálně dvě stejné pružiny o tuhosti $k = 1{,}0{,}10^5\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ a délce $l = 5{,}0\,\mathrm{m}$, které spojíme. Následně do spoje zavěsíme závaží o hmotnosti $m = 3{,}0\,\mathrm{kg}$. O jakou vzdálenost h klesne spoj pružin pod tíhou závaží? Předpokládejte, že $h \ll l$ a $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Začíná to být napínavé.

Délka každé pružiny po napnutí je $l' = \sqrt{l^2 + h^2}$, a tedy prodloužení pružiny je

$$\Delta l = l' - l = \sqrt{l^2 + h^2} - l = l\left(\sqrt{1 + \frac{h^2}{l^2}} - 1\right) \approx l\left(1 + \frac{h^2}{2l^2} - 1\right) = \frac{h^2}{2l}\,.$$

Vertikální složka síly F_v, kterou každá pružina působí na závaží proti směru tíhové síly, je dána

$$F_v = \frac{h}{\sqrt{l^2 + h^2}}k\Delta l = \frac{kh^3}{2l^2}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{l^2}}} \approx \frac{kh^3}{2l^2}\left(1 - \frac{h^2}{2l^2}\right) \approx \frac{kh^3}{2l^2}\,.$$

Jelikož jsou pružiny dvě, je celková síla, která balancuje tíhu závaží F_g, dána

$$F_g = 2F_v\,,$$

$$mg = \frac{kh^3}{l^2}\,,$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{mgl^2}{k}} \approx 0{,}19\,\mathrm{m}\,.$$

Štěpán Marek
stepan.marek@fykos.cz

Úloha FoL.24 ... psíček

6 bodů

Představme si, že se nacházíme na hypotetické planetě Caniculium obíhající bílého trpaslíka Síria B, který je slabší složkou dvojhvězdy Sírius. Tato planeta se nachází na oběžné dráze, z které je možné pozorovat hybridní zatmění Síria A (při hybridním zatmění mají hvězdy stejnou úhlovou velikost). Zjistěte podíl osvětlení krajiny (výkonu dopadajícího na povrch planety) během zatmění v porovnaní se stavem těsně před jeho začátkem. Efektivní povrchové teploty těchto hvězd jsou $T_A = 9940\,\mathrm{K}$, $T_B = 25\,000\mathrm{K}$. *Dodo si myslí, že Měsíc nesvítí sám.*

Hybridné zatmenie nastáva v situácii, keď majú oba telesá účastniace sa zatmenia rovnaký uhlový rozmer. Aby sa disky presne prekryli, musí pre polomery hviezd R_A, R_B a vzdialenosti planéty od hviezd r_A, r_B platiť

$$\frac{R_A}{r_A} = \frac{R_B}{r_B}\,.$$

Žiarivý výkon hviezd určíme so Stephanovho-Boltzmannovho zákona ako

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4\,.$$

Tento výkon je vyžarovaný do celej sféry s polomerom r. Na $1\,\mathrm{m}^2$ dopadne teda tok

$$F = \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{R^2}{r^2}\sigma T^4\,.$$

Nás zaujíma pomer tokov pre situáciu, keď nás osvetľuje len Sírius B a keď nás osvetľujú obe hviezdy

$$w = \frac{F_B}{F_A + F_B} = \left(1 + \frac{F_A}{F_B}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{\frac{R_A^2}{r_A^2}\sigma T_A^4}{\frac{R_B^2}{r_B^2}\sigma T_B^4}\right)^{-1} = \frac{1}{1 + \frac{T_A^4}{T_B^4}} = 0{,}976\,.$$

Krajina by bola osvetľovaná slabším svetlom, na úrovni $w = 0,976$ stavu pred zatmením.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha FoL.25 ... emise z lihu

3 body

Máme $V_\mathrm{e} = 1{,}00\,\mathrm{dm}^3$ kapalného ethanolu, který necháme shořet v atmosféře s dostatkem kyslíku, takže probíhá dokonalé hoření na oxid uhličitý (CO_2). Jak velkou nádobu bychom potřebovali, abychom do ní mohli umístit právě všechen uvolněný oxid uhličitý o standardním atmosférickém tlaku a teplotě 0°C? (Předpokládejte, že ostatních produktů se dokážeme zbavit.) *Karel uvažoval o experimentech.*

Hustotu a molární molekulovou hmotnost lihu označíme $\varrho = 789\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a $M_\mathrm{m} = 46{,}07\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$. Potom pro látkové množství lihu platí

$$n_\mathrm{e} = \frac{V_\mathrm{e}\varrho}{M_\mathrm{m}}\,.$$

Molekula ethanolu obsahuje dva uhlíky, tudíž látkové množství oxidu uhličitého bude dvojnásobné, $n_\mathrm{o} = 2n_\mathrm{e}$. Nyní už jen látkové množství vynásobíme molárním objemem plynu za daných standardních podmínek $V_\mathrm{m} = 22{,}41\,\mathrm{dm^3{\cdot}mol^{-1}}$ a dostaneme

$$V = n_\mathrm{o} V_\mathrm{m} = \frac{2V_\mathrm{e}\varrho V_\mathrm{m}}{M_\mathrm{m}} \doteq 0{,}768\,\mathrm{m}^3\,.$$

Na zachycení veškerého oxidu uhličitého vzniklého spálením jednoho litru lihu bychom potřebovali nádobu s objemem $V \doteq 0{,}768\,\mathrm{m}^3$.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FoL.26 ... skok do neznáma — 4 body

Velmi tenký válec o délce $l = 32{,}7\,\mathrm{cm}$ je ve vertikální poloze, přičemž jeho spodní podstava je ve výšce deseti délek válce nad hladinou vody. Do jaké hloubky pod hladinou se dostane nejnižší bod válce poté, co ho pustíme? Kapalina má třikrát větší hustotu než válec. Odporové, třecí i povrchové síly zanedbejte. *Jáchym v Minecraftu spadl do vody.*

Zaveďme svislou souřadnici mířící směrem dolů, přičemž její počátek je na hladině vody. Označme $n = 10$, potom na válec působí tíhová síla $F_g = mg$ a vztlaková síla

$$F_\mathrm{v} = \begin{cases} 0\,, & x \in (-nl,\, 0) \\ -xS\varrho g\,, & x \in (0,\, l) \\ -lS\varrho g, & x \in (l,\, \infty)\,, \end{cases}$$

kde S je obsah průřezu válce a ϱ je hustota vody. Vztlaková síla je záporná, protože míří proti směru souřadnice x. Označme $k = 3$, potom je hustota válce rovna ϱ/k a platí $m = lS\varrho/k$.

Spodek válce se ponoří do neznámé hloubky h, načež se zastaví. V tu chvíli bude mít nulovou kinetickou energii, takže jeho potenciální energie bude stejná jako na začátku. To znamená, že celková práce, kterou na válci během pohybu vykonaly tíhová a vztlaková síla, bude nulová. To můžeme zapsat rovnicí

$$\int_{-nl}^{h} (F_g + F_\mathrm{v})\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Tento integrál si rozdělíme na tři, protože vztlaková síla se chová různě ve třech různých intervalech. Rovnou si za ni dosadíme a dostáváme

$$\int_{-nl}^{0} mg\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{l} (mg - xS\varrho g)\,\mathrm{d}x + \int_{l}^{h} (mg - lS\varrho g)\,\mathrm{d}x = 0\,,$$

$$[mgx]_{-nl}^{0} + \left[mgx - \frac{1}{2}x^2 S\varrho g\right]_0^l + [mgx - lS\varrho g x]_l^h = 0\,.$$

Odtud si už snadno vyjádříme

$$h = \frac{l}{2}\frac{2nm + lS\varrho}{lS\varrho - m}\,.$$

Nyní už jen dosadíme za m a můžeme psát výsledek

$$h = \frac{l}{2}\frac{2n + k}{k - 1} = \frac{23}{4}l \doteq 1{,}88\,\mathrm{m}\,.$$

Válec se ponoří do hloubky 1,88 m. Díky všem zjednodušením v zadání úlohy nezávisí výsledek na obsahu ani tvaru podstavy.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FoL.27 ... kutálející se kužel 5 bodů

Po vodorovné podložce se bez prokluzování se zanedbatelným valivým třením kutálí kužel s poloměrem podstavy $r = 10{,}0\,\mathrm{cm}$ a výškou $h = 100{,}0\,\mathrm{cm}$ vyrobený z materiálu o hustotě $\varrho = 1253\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Úhlová rychlost rotace kuželu okolo osy kolmé na podložku procházející jeho vrcholem je $\omega = 2{,}50\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. Určete velikost síly, kterou působí kužel na podložku.

Dodovi se točila hlava.

Ťažisko kužeľa koná rovnomerný pohyb po kružnici, preto celková výslednica síl pôsobiacich na kužeľ musí smerovať z ťažiska kolmo k osi otáčania. Ak vzdialenosť ťažiska od osi označíme s, pre dostredivú silu platí $F_\mathrm{d} = m\omega^2 s$. Na kužeľ pôsobí tiažová sila F_g a tlaková sila podložky F, ktorá má vo vodorovnom smere zložku $F_1 = -F_\mathrm{d}$ a vo zvislom smere zložku $F_2 = -F_g = -mg$. Celkovo je jej veľkosť

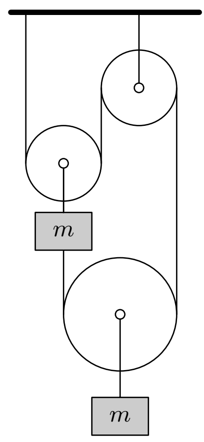
$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = m\sqrt{\omega^4 s^2 + g^2} = \frac{\pi}{3}\varrho r^2 h\sqrt{\frac{9\omega^4 h^4}{16(h^2 + r^2)} + g^2}\,,$$

kde sme využili Pythagorovu vetu a fakt, že ťažisko kužeľa delí úsečku vrchol-stred podstavy v pomere 3:1.

Po dosadení číselných hodnôt získavame výsledok $F \doteq 143\,\mathrm{N}$.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha FoL.28 ... kladky 5 bodů



Určete zrychlení spodní kladky i jeho směr (uveďte záporné, pokud směřuje směrem dolů a kladné v opačném případě). Neuvažujte moment setrvačnosti kladek.

Matějovi chtěl vymyslet nekonečný systém kladek, ale nevycházelo mu to.

Vyjdeme z faktu, že lano je ve všech místech napínáno stejnou silou F. Pro zrychlení první kladky zprava tedy dostáváme

$$a_1 = \frac{F}{m} - g\,.$$

A pro spodní kladku máme

$$a_2 = \frac{2F}{m} - g\,.$$

Dále si stačí rozmyslet, že z nepružnosti provázku vyplývá $a_1 = -2a_2$.

Řešením těchto tří rovnic dostáváme

$$a_1 = -2/5g\,,$$

$$a_2 = 1/5g = 1{,}96\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Zrychlení spodní kladky je $a_2 = 1/5g = 1{,}96\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

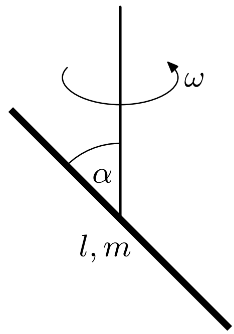
Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha FoL.29 ... malý moment

5 bodů

Tenká homogenní tyč je připevněna k ose otáčení, jež prochází středem tyče. Tyč je odkloněna o úhel $\alpha = 45^\circ$ od osy. Tyč váží $m = 40\,\mathrm{g}$, má délku $l = 30\,\mathrm{cm}$ a rotuje s úhlovou rychlostí $\omega = 25\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. Jaká je velikost momentu síly, kterým působí tyč na bod uchycení?

Jindrovi neprošla úloha s tenzorem setrvačnosti, tak vymyslel tohle!



V rotující soustavě spojené s tyčí působí na tyč odstředivá síla, jež se snaží odtlačit hmotu tyče co nejdál od osy otáčení. Pokud by tyč byla kolmá na osu otáčení, odstředivé síly působící na každé rameno by ležely na přímce a jejich moment by byl nulový. Takto se ale nevyruší.

Označme délkovou hustotu tyče τ. Odstředivá síla působící na element tyče bude

$$\mathrm{d}F_\mathrm{o} = \mathrm{d}m\omega^2 r_x = \tau\omega^2 s\sin\alpha\mathrm{d}s\,.$$

Celkový moment síly spočítáme tak, že zintegrujeme momenty infinitezimálních odstředivých sil přes celou délku tyče.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}M_\mathrm{o} &= r_y\mathrm{d}F_\mathrm{o} = s\cos\alpha\mathrm{d}F_\mathrm{o} = \tau\omega^2\sin\alpha\cos\alpha s^2\mathrm{d}s\\
M_\mathrm{o} &= \tau\omega^2\sin\alpha\cos\alpha\int_{-l/2}^{l/2} s^2\mathrm{d}s = \tau\omega^2\sin\alpha\cos\alpha\left[\frac{1}{3}s^3\right]_{-l/2}^{l/2}\\
M_\mathrm{o} &= \frac{1}{24}m\omega^2 l^2\sin 2\alpha\\
M_\mathrm{o} &= 0{,}09375\,\mathrm{N{\cdot}m}\,.
\end{aligned}$$

Moment síly působící na bod závěsu má velikost $0{,}09375\,\mathrm{N{\cdot}m}$.

Vektor momentu síly míří kolmo na rovinu tvořenou tyčí a osou. Obecně platí, že vektor momentu hybnosti a vektor úhlové rychlosti nemusejí být rovnoběžné. V tomto případě rotuje vektor momentu hybnosti okolo osy. Aby se tyč neotočila do polohy kolmo na osu, musí na ni závěs působit stejným momentem opačného směru. Právě tento moment síly způsobuje rotaci momentu hybnosti podle druhé impulzové věty $M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$.

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Úloha FoL.30 ... asteroid s impaktním parametrem 5 bodů

Máme asteroid, který má ve velké vzdálenosti (můžeme ji považovat za nekonečnou) od Slunce rychlost $v = 3{,}9\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. Asteroid se blíží po takové trajektorii, že pokud by letěl z původní (nekonečné) vzdálenosti a Slunce by na něj nepůsobilo gravitační silou, pak by se nejblíže přiblížil na 1 au. Na jakou nejbližší vzdálenost se přiblíží, když na něj Slunce působí gravitační silou? *Karel se zamyslel nad mimozemšťany, co posílají sondy po vesmíru.*

V případě bez gravitace bude rychlost celou dobu konstantní, označme ji v_1. Nejbližší vzdálenost asteroidu a Slunce označme r_1. Potom moment hybnosti asteroidu bude $L_1 = mr_1v_1$, kde m je hmotnost asteroidu.

Ve druhém případě opět označme vzdálenost a rychlost v bodě nejblíže Slunci r_2 a v_2. Moment hybnosti potom spočítáme jako $L_2 = mr_2v_2$. Pro řešení úlohy je zásadní fakt, že moment hybnosti bude po celou dobu pohybu konstantní. Jelikož počáteční stav je pro oba případy stejný, bude zároveň platit $L_1 = L_2$.

Těleso má ve vzdálenosti r_2 od Slunce s hmotností $M = 1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ potenciální energii

$$E_\mathrm{p} = -\frac{GMm}{r_2}\,,$$

kde jsme jako nulovou hladinu zvolili nekonečno. Celková mechanická energie asteroidu se zachovává, takže platí

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2}\,.$$

Dosazením z rovnosti momentů setrvačnosti dostáváme kvadratickou rovnici

$$v_1^2r_2^2 + 2GMr_2 - r_1^2v_1^2 = 0\,,$$

jejímž řešením je

$$r_2 = \frac{-GM \pm \sqrt{G^2M^2 + r_1^2v_1^4}}{v_1^2}\,.$$

Fyzikální smysl má zřejmě kořen s +, takže máme výsledek

$$r_2 = \frac{-GM + \sqrt{G^2M^2 + r_1^2v_1^4}}{v_1^2} \doteq 1{,}3 \cdot 10^6\,\mathrm{km}\,.$$

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FoL.31 ... vada koule 5 bodů

Astronom chce vyfotografovat hvězdu pomocí Newtonova dalekohledu. Primární zrcadlo dalekohledu je kulové (ne parabolické) o poloměru křivosti $R = 1{,}00\,\mathrm{m}$ a příčném průměru $d = 10{,}0\,\mathrm{cm}$. Astronom umístil do ohniskové roviny ve vzdálenosti $R/2$ od zrcadla CCD čip. Jaký poloměr bude mít obraz hvězdy zobrazený na čip? Hvězdu považujte za bodový zdroj světla. *Jindra přemýšlel nad nedokonalostmi světa...*

Na kulovém zrcadle se projevuje tzv. kulová vada - paprsky odražené od okraje zrcadla se protnou jinde než paprsky odražené blíže k optické ose. Výsledný obraz tak bude neostrý.

Stále však platí zákon odrazu, takže můžeme efekt spočítat. Paprsek přilétající rovnoběžně s optickou osou v kolmé vzdálenosti x od osy svírá s normálou plošky, na které se odrazí, úhel $\alpha = \arcsin(x/R)$. Odražený paprsek pak protne optickou osu, s níž svírá úhel 2α ve vzdálenosti $s = R/(2\cos\alpha)$ od středu křivosti. Vzdálenost mezi bodem, kde se protnou paprsky procházející velice blízko optické osy, a bodem, kde se protnou paprsky odražené od okraje zrcadla, je

$$\Delta s = \frac{R}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha_m} - 1\right) ,$$

kde $\alpha_\mathrm{m} = \arcsin(d/(2R))$, číselně $\alpha_\mathrm{m} = 2{,}87^\circ$ a $\Delta s = 6{,}26 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$. Odražené paprsky vytvoří na CCD čipu kolečko o poloměru

$$\varrho = \Delta s \,\mathrm{tg}\,(2\alpha_m) .$$

Číselný výsledek je $\varrho = 62{,}9\,\mathrm{\mu m}$.

Kulovou vadu řeší parabolické zrcadlo. Na druhou stranu, vybrousit kulovou plochu je jednodušší a levnější. Proto se jen zrcadla s větším průměrem brousí jako parabolická.

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha FoL.32 ... kvantový Kepler

5 bodů

Jak jistě víte, 3. Keplerův zákon dává do souvislosti velkou poloosu s oběžnou dobou vesmírných těles $a^3/T^2 = \mathrm{konst.}$ Tento vztah se dá odvodit i z povahy gravitačního pole. Elektrické pole je také nepřímo úměrné kvadrátu vzdálenosti, takže situace je analogická gravitačnímu poli. Odvoďte, jak by vypadal 3. Keplerův zákon pro soustavu protonu s elektronem, kdyby se chovaly podle zákonů klasické fyziky. Jaký by byl poměr třetí mocniny velké poloosy ku druhé mocnině periody?

Jindra přemýšlel nad vysvětlením atomových orbitalů vodíku pomocí vložených platónských těles.

Nechť a je vzdálenost mezi elektronem a protonem. Ty obíhají okolo společného těžiště, které je od elektronu vzdáleno

$$r_\mathrm{e} = \frac{m_p}{m_p + m_e} a .$$

Navzájem se přitahují silou

$$F_\mathrm{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{a^2} .$$

Přitažlivá elektrická síla působí zároveň jako dostředivá síla zakřivující dráhy elektronu a protonu.

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{a^2} = m_\mathrm{e}\omega^2 r_\mathrm{e} = m_\mathrm{e}\frac{4\pi^2}{T^2}\frac{m_\mathrm{p}}{m_\mathrm{p} + m_\mathrm{e}} a$$

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{e^2(m_\mathrm{p} + m_\mathrm{e})}{16\pi^3\varepsilon_0 m_\mathrm{e} m_\mathrm{p}} \tag{1}$$

Jelikož výsledek chceme znát s přesností na 6 platných cifer, musíme dosadit do vztahu konstanty také minimálně s přesností na 6 platných cifer.[1]

$$
\begin{aligned}
e &= 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \\
m_\mathrm{e} &= 9{,}109\,383\,7015(28) \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \\
m_\mathrm{p} &= 1{,}672\,621\,923\,69(51) \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \\
\pi &\doteq 3{,}141\,592\,654 \\
\varepsilon_0 &= 8{,}854\,187\,8128(13) \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F{\cdot}m}
\end{aligned}
$$

Po dosazení do vztahu (1) vyjde

$$\frac{a^3}{T^2} = 6{,}418\,74\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Pro atom vodíku vychází poměr $a^3/T^2 = 6{,}418\,74\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-2}}$. Jen pro srovnání, pro soustavu Země a Slunce vychází $a^3/T^2 = 3{,}36 \cdot 10^{18}\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-2}}$.

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha FoL.33 ... napínavý strom 6 bodů

Jáchym pokácel strom, který můžeme aproximovat tenkým homogenním válcem o délce $l = 30{,}0\,\mathrm{m}$. Strom je ještě částečně spojený s pařezem, takže jeho vrchol během pádu opisuje část kružnice. V jaké vzdálenosti od pařezu působí ve stromu nulové podélné napětí ve chvíli, kdy je úhel mezi padajícím stromem a zemí $\alpha = 47^\circ$? Vzdálenost měříme podél délky stromu. Spojení stromu s pařezem nezpůsobuje žádné ztráty energie. *Jáchym (se) kácel.*

Označme vzdálenost pařezu a hledaného bodu x. Koncový úsek stromu o délce $(l - x)$ a hmotnosti m_x má těžiště ve vzdálenosti $r = (l + x)/2$ od pařezu. Na tento úsek působí svisle tíhová síla $F_g = m_x g$, jejíž průmět na strom je $F_{g_t} = F_g \sin\alpha$. Aby se stále pohyboval po kružnici, musí na něj působit dostředivá síla $F_\mathrm{d} = m_x \omega^2 r$, kde ω je úhlová rychlost otáčení stromu. Ve vzdálenosti x bude působit nulové podélné napětí tehdy, když se vyrovnají všechny síly působící na konec stromu v dostředivém směru. Neboli v tu chvíli, kdy bude platit $F_{g_t} = F_\mathrm{d}$.

Velikost úhlové rychlosti určíme snadno z rovnosti rotační energie stromu a úbytku jeho potenciální energie

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} J\omega^2 &= mg\left(l - l\sin\alpha\right)/2\,, \\
\omega^2 &= \frac{3g\left(1 - \sin\alpha\right)}{l}\,,
\end{aligned}
$$

kde jsme využili momentu setrvačnosti tyče vůči koncovému bodu

$$J = \frac{1}{3} m l^2\,.$$

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_physical_constants`

Nyní již jen dosadíme do rovnosti sil a dostáváme

$$x = \frac{5\sin\alpha - 3}{3\,(1 - \sin\alpha)} l \doteq 24{,}4\,\mathrm{m}\,.$$

Za zmínku stojí, že výsledný vzorec nedává smysl pro příliš malé nebo příliš velké úhly α, protože při nich hledaná vzdálenost x vychází buď záporná nebo větší než l. Nicméně v tomto případě je α zvolena vhodně a vychází $x = 24{,}4\,\mathrm{m}$.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FoL.34 ... štíhlá linie

5 bodů

Jindra se vrací z kosmické výpravy a blíží se k Zemi rychlostí $v = 0{,}300\,c$. Danka, jejíž klidová hmotnost je $50{,}0\,\mathrm{kg}$, už se nemůže dočkat, až jí Jindra povypráví o vesmíru, a chce mu letět naproti. Zároveň však Danka držela dietu a nepřeje si, aby Jindra ze své vztažné soustavy naměřil její relativistickou hmotnost vyšší než $60{,}0\,\mathrm{kg}$. Jakou maximální rychlostí u vzhledem k Zemi může vyrazit Jindrovi vstříc? Rychlost uveďte v násobcích c.

Jindrovi už je cestování po Zemi málo.

Relativistická hmotnost Danky naměřená Jindrou ve své vztažné soustavě nesmí přesáhnout 60,0 kg. Označme relativní rychlost Danky vůči Jindrovi jako w. Jindra ze své soustavy pozoruje, že Země se k němu přibližuje rychlostí $v = 0{,}300\,\mathrm{c}$ a Danka se k němu přibližuje vyšší rychlostí w. Rychlosti u a v se skládají relativisticky, takže

$$w = \frac{v + u}{1 + \frac{uv}{c^2}}\,. \tag{2}$$

Vztah mezi klidovou hmotností a relativistickou hmotností, jak ji změří Jindra, je

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{w}{c}\right)^2}}\,.$$

Pokud Jindra má pozorovat, že Danka váží méně než 60,0 kg, pak se vůči němu může pohybovat maximálně rychlostí $w = c\sqrt{1 - (m_0/m)^2} = 0{,}553\,\mathrm{c}$. Z rovnice (2) vyjádříme rychlost u jako

$$u = \frac{w - v}{1 - \frac{wv}{c^2}} \doteq 0{,}303\,\mathrm{c}\,.$$

Danka tedy může vyrazit Jindrovi naproti maximálně rychlostí $u = 0{,}303\,\mathrm{c}$.

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha FoL.35 ... přihřátý setrvačník

4 body

O kolik kelvinů se zahřeje setrvačník, který se z původní frekvence otáčení $f = 120\,\mathrm{Hz}$ zastaví? Uvažujte, že polovina jeho kinetické energie se využije pro zahřátí setrvačníku. Setrvačník je homogenní válec s poloměrem $r = 15\,\mathrm{cm}$ a je z oceli, která má měrnou tepelnou kapacitu $c = 450\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$. Ještě napovíme, že nepotřebujete znát žádné další veličiny, pouze hodnotu Ludolfova čísla.

Karel diskutoval úlohy TMF.

Kinetická energie setrvačníku je

$$E = \frac{1}{2} J\omega^2 \,.$$

Dále víme, že $\omega = 2\pi f$ a moment setrvačnosti válce $J = mr^2/2$, tedy

$$E = \pi^2 m r^2 f^2 \,.$$

Změnu teploty určíme ze vztahu pro teplo $Q = mc\Delta t$, kde Δt je změna teploty. Ze zadání víme, že se uplatní pouze polovina energie, tedy počítáme

$$\frac{E}{2} = Q \quad \Rightarrow \quad mc\Delta t = \frac{1}{2}\pi^2 m r^2 f^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\pi^2 r^2 f^2}{2c} \doteq 3{,}6\,\mathrm{K} \,.$$

Setrvačník se po úplném zastavení zahřeje zhruba o 3,6 K.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha FoL.36 ... looping 6 bodů

Představte si motorkáře, který chce projet tenký vertikální kruhový looping tvaru pláště válce s vodorovnou rotační osou s poloměrem $R = 10{,}0\,\mathrm{m}$. Looping tedy nemá žádný vjezd ani výjezd a motorkář se rozjíždí z nejspodnějšího bodu s konstantním uhlovým zrychlením. Jaká je jeho minimální hodnota, aby motorka dokázala loopingem projet bez odlepení (spadnutí)? Uvažujte $g = 9{,}81\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-2}}$. *Matěj už mnohorkát úspěšně projel autíčkem looping.*

Celý problém řešíme z pohledu motorkáře. Na něj působí dvě síly - odstředivá a tíhová. Tyto síly lze rozložit do složek rovnoběžných se směrem jeho rychlosti (tečných) a složek kolmých na aktuální bod dráhy (normálových). Vyjdeme z podmínky, že celková normálová síla musí motorkáře vždy přitlačovat ke trati, jinak by se odlepil. Dále budeme místo sil počítat se zrychleními, abychom nemuseli uvažovat motorkářovu hmotnost.

Nechť je poloměr loopingu R. V rotující soustavě spojené s motorkářem na něj působí jak odstředivé zrychlení, tak i Eulerovo zrychlení, které ale působí pouze v tečném směru. Korielisovo zrychlení je nulové, protože zde není radiální ryhlost. Odstředivé zrychlení má vždy pouze normálovou složku $a_\mathrm{o} = \omega^2 R = \varepsilon^2 t^2 R$, kde $\omega = \varepsilon t$ je úhlová rychlost motorkáře a ε je úhlové zrychlení jeho motorky (vzheldem ke středu válce). Normálová složka tíhové síly je $a_\mathrm{n} = g\cos\varphi$, kde φ je úhel popisující motorkářovu polohu (na startu je nulový a v nejvyšším bodě $\varphi = \pi$). Zapíšeme podmínku neodlepení

$$\begin{aligned} a_\mathrm{n} + a_\mathrm{o} &\geq 0 \,, \\ g\cos\varphi + \varepsilon^2 t^2 R &\geq 0 \,, \\ g\cos\varphi + 2\varepsilon R\varphi &\geq 0 \,, \end{aligned}$$

kde po dosazení $\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}$ dostáváme

$$\varepsilon \geq -\frac{g}{2R}\frac{\cos\varphi}{\varphi} \,. \tag{3}$$

Tato podmínka musí plati pro všechna φ. Hledáme tedy takové φ_m, pro které nabývá výraz $\frac{\cos\varphi_\mathrm{m}}{\varphi_\mathrm{m}}$ minimální hodnotu. Může nám pomoct jeho první derivace

$$\frac{-\varphi\sin\varphi-\cos\varphi}{\varphi^2}=0\,,$$
$$\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi=-1\,,$$
$$\varphi=-\,\mathrm{cotg}\,\varphi\,.$$

Takovýto typ rovnic neumíme řešit analyticky, ale máme k dispozici kalkulačku a vzhledem k tomu, že výsledek není potřeba na velké množství platných cifer, po pár dosazeních zjistíme, že nejnižší kladná hodnota, která rovnici splňuje je přibližně $\varphi_\mathrm{m}=2{,}798\,3\ldots$
Překvapivě kritický bod nemusí být ve vrcholu loopingu.

Po dosazení zpět do vztahu (3) dostáváme minimální možné zrychlení

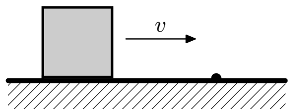
$$a=\left(0{,}01683\,\mathrm{m}^{-1}\right)g=0{,}16506\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Při menším zrychlení by se už motorkář odlepil.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha FoL.37 ... hrboly na cestě 6 bodů

Samotná homogenní krychlička o straně $a=1{,}0\cdot10^{-2}\,\mathrm{m}$ se vesele klouže rychlostí v po vodorovné rovině bez tření tak, že jedna (tedy dvě) stěna je kolmá na směr pohybu. Přímo před ní se však nachází nízká zarážka, do které krychlička dokonale nepružně narazí středem svojí spodní přední hrany. Určete minimální rychlost v, při které se krychlička přes hrbol převrátí.



Spočítal Matěj během kolejní párty.

Vyjdeme ze zákona zachování momentu hybnosti vůči ose, která prochází hranou krychličky, kterou narazila do hrbolu a po nárazu se okolo ní začala otáčet. Před nárazem je moment hybnosti

$$L=\frac{1}{2}mav\,,$$

kde m je celková hmotnost krychličky, protože směr rychlosti těžiště je vzdálený o $a/2$ od osy a všechny body se pohybují rychlostí v. Moment setrvačnosti krychle vůči ose otáčení je díky Steinerově větě součet momentu setrvačnosti krychle kolem osy procházející těžištěm a $m(a/\sqrt{2})^2$, protože vzdálenost těžiště od osy je $a/\sqrt{2}$,

$$J=\frac{1}{6}ma^2+\frac{1}{2}ma^2=\frac{2}{3}ma^2\,.$$

V okamžiku po nárazu se bude kvádřík otáčet kolem hrbolku rychlostí

$$\omega=\frac{L}{J}\,.$$

Jeho kinetická energie bude

$$E=\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{L^2}{2J}\,.$$

Tato energie musí být dostatečná na překonání hrbolu, což odpovídá zvednutí těžiště o

$$\frac{\sqrt{2}-1}{2}a\,,$$

tedy

$$E = \frac{\sqrt{2}-1}{2}amg\,.$$

Dosazením do předchozí rovnice pro energii dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{2J} &= \frac{\sqrt{2}-1}{2}amg\,, \\ \frac{3}{8}v^2 &= \left(\sqrt{2}-1\right)ag\,, \\ v &= \sqrt{\frac{8}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)ag} = 0{,}3292\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,. \end{aligned}$$

To je kritická rychlost, při které dojde k převržení krychle.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha FoL.38 ... pirát silnic 4 body

Dano jede po silnici rychlostí $v_\mathrm{d} = 90\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Ve vzdálenosti $d = 110\,\mathrm{m}$ před sebou spatří cyklistu jedoucího rychlostí $v_\mathrm{c} = 18\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Kvůli autům v protisměru nemůže Dano cyklistu objet, takže musí dupnout na brzdu. Danův reakční čas je $t_\mathrm{r} = 0{,}50\,\mathrm{s}$. Jaká je nejmenší velikost zrychlení auta, aby Dano cyklistu nesrazil? Auto zpomaluje rovnoměrně.

Jindra jel jednou s Danem autem a už mu to stačilo.

Úloha se nám nejlépe bude řešit, pokud se přesuneme do soustavy spojené s cyklistou. Vůči cyklistovi se auto pohybuje rychlostí $v_\mathrm{r} = 72\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} = 20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Dano cyklistu nesrazí, pokud zpomalí na nulu těsně za cyklistou (vzhledem k cyklistovi). Než Dano dupne na brzdu, urazí auto ještě vzdálenost

$$d_1 = v_\mathrm{r}t_\mathrm{r}\,.$$

Číselně $d_1 = 10\,\mathrm{m}$. V tu chvíli je mezi autem a cyklistou vzdálenost $d_2 = 100\,\mathrm{m}$. Minimální velikost zrychlení dostaneme z rovnic pro rovnoměrně zrychlený pohyb

$$\begin{aligned} v_\mathrm{r}^2 &= 2ad_2\,, \\ a &= \frac{v_\mathrm{r}^2}{2d_2}\,. \end{aligned}$$

Minimální velikost zrychlení vyjde $a = 2{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Úloha FoL.39 ... pomalu vržený kámen

6 bodů

Ida je jedním z mála asteroidů v hlavním pásu planetek, o němž víme, že má vlastní přirozenou družici. Dactyl, jak se tento měsíc jmenuje, nemá zcela dobře změřený tvar orbity. Předpokládejme, že pericentrum je $r_\mathrm{p} = 100\,\mathrm{km}$ a apocentrum $r_\mathrm{a} = 200\,\mathrm{km}$. Hmotnost Dactylu je $m_\mathrm{D} = 10^{10}\,\mathrm{kg}$, hmotnost Idy je $m_\mathrm{I} = 5\cdot 10^{16}\,\mathrm{kg}$. Představme si, že na povrchu Dactylu stojí astronaut o hmotnosti $m = 100\,\mathrm{kg}$, který při průchodu pericentrem vyskočí ve směru oběhu Dactylu rychlostí $v = 5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Určete, jak se tímto výskokem posune apocentrum Dactylu (kladné číslo znamená oddálení). Astronaut po výskoku představuje třetí těleso v systému – zanedbejte ho, tj. řešte úlohu jako problém 2 těles. *Mirek vymýšlí úlohy během konference.*

Ze zákona zachování hybnosti určíme novou rychlost Dactylu v původním pericentru

$$v'_\mathrm{p} = v_\mathrm{p} - \frac{m}{m_\mathrm{D}} v\,.$$

Dále úlohu řešíme pomocí zákonů zachování momentu hybnosti a energie na základě znalosti polohy apocentra a pericentra. Je potřeba si uvědomit, že pokud odečteme od Dactylu hmotnost astronauta, jeho oběžná dráha se nezmění. Při výpočtu tedy můžeme vyjít ze zákonů zachování napsaných pro hmotnost Dactylu

$$m_\mathrm{D} r_\mathrm{p} v_\mathrm{p} = m_\mathrm{D} r_\mathrm{a} v_\mathrm{a}\,,$$

$$-\frac{G m_\mathrm{D} m_\mathrm{I}}{r_\mathrm{p}} + \frac{1}{2} m_\mathrm{D} v_\mathrm{p}^2 = -\frac{G m_\mathrm{D} m_\mathrm{I}}{r_\mathrm{a}} + \frac{1}{2} m_\mathrm{D} v_\mathrm{a}^2$$

a po výskoku astronauta dostaneme stejnou dvojici rovnic, ovšem s rychlostí v'_p místo v_p, v'_a místo v_a, vzdáleností r'_a místo r_a a $r'_\mathrm{p} = r_\mathrm{p}$. Že staré pericentrum bude i novým pericentrem, je zřejmé, neboť směr rychlosti se nezměnil a oběžnice se pohybuje kolmo na spojnici s centrálním tělesem pouze tehdy, když je v pericentru nebo v apocentru (a v apocentru být nemůže, neboť změna rychlosti byla velmi malá).

Z první sady zákonů (proměnné bez čárek) dokážeme vyjádřit rychlost v periheliu

$$v_\mathrm{p} = \left(\frac{2 G m_\mathrm{I}}{r_\mathrm{p}\left(1 + \frac{r_\mathrm{p}}{r_\mathrm{a}}\right)}\right)^{1/2} = 6{,}670\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,,$$

známe tedy i rychlost v'_p. Navíc můžeme využít rozvoje

$$(v'_\mathrm{p})^2 \approx v_\mathrm{p}^2 - \frac{2m}{m_\mathrm{D}} v v_\mathrm{p}\,.$$

Podobně pak z druhé sady zákonů (čárkované proměnné) dokážeme vyjádřit r'_a, dostaneme výraz

$$r'_\mathrm{a} = -\frac{v'^2_\mathrm{p} r_\mathrm{p}}{v'^2_\mathrm{p} - \frac{2 G m_\mathrm{I}}{r_\mathrm{p}}} \approx r_\mathrm{a}\left(1 - \frac{4 G m_\mathrm{I} m v}{v_\mathrm{p}\left(v_\mathrm{p}^2 - \frac{2 G m_\mathrm{I}}{r_\mathrm{p}}\right) r_\mathrm{p} m_\mathrm{D}}\right)\,.$$

Nyní můžeme dosadit výraz pro v_p, ale tvar výsledného vztahu pro r'_a se tím příliš nezkrášlí. Navíc vidíme, že v_p nevystupuje nikde, kde by docházelo k odečítání blízkých čísel, můžeme proto bez obav použít výše získanou číselnou hodnotu a spolu s hodnotami ze zadání dostaneme

$$r'_\mathrm{a} - r_\mathrm{a} \doteq -4{,}45 \cdot 10^{-8} r_\mathrm{a} \doteq -9{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}\,.$$

Apocentrum Dactylu se posune o 0,9 cm směrem dovnitř. Relativní změnu v řádu 10^{-8} šlo očekávat, neboť rychlost výskoku astronauta a rychlost Dactylu v pericentru jsou podobné a poměr jejich hmotností je $m/m_\mathrm{D} = 10^{-8}$.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.40 ... estetické kuličky

6 bodů

Máme dvě zanedbatelně malé kuličky o stejné hmotnosti, které visí na závěsech zanedbatelné hmotnosti upevněných v jednom bodě. Obě mají stejný náboj a jsou umístěny v homogenním tíhovém poli. Díky tomu svírají jejich závěsy úhel 10°*. Pokud zvýšíme náboj jedné kuličky na dvojnásobek, na kolikanásobek musíme upravit náboj druhé kuličky, aby posléze svíraly úhel* 25°*?*

Karel slyšel o plánech Danky.

Označme náboj a hmotnost kuliček a délku závěsu po řadě q, m a l. Počáteční sklon závěsů je $\alpha_0 = 5^\circ$. Jelikož je soustava nehybná, výslednice všech sil působících na každou kuličku musí být nulová. K tomu stačí, aby součet tíhové a elektrické síly mířil ve směru závěsu. Označíme-li

$$F_g = mg\,,$$

$$F_\mathrm{e} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q^2}{4l^2\sin^2\alpha_0}\,,$$

bude platit

$$\frac{F_\mathrm{e}}{F_g} = \operatorname{tg}\alpha_0\,.$$

Tuto rovnici upravíme na

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q^2}{4l^2mg} = \operatorname{tg}\alpha_0\sin^2\alpha_0\,.$$

Nyní změníme úhel na $\alpha = 12{,}5^\circ$. Všechny konstanty zůstanou stejné, až na to, že q^2 se změní na $2kq^2$, kde k je výsledek této úlohy. Z upravené rovnice už snadno vyjádříme

$$k = 4\pi\varepsilon\frac{4l^2mg}{2q^2}\operatorname{tg}\alpha\sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha\sin^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha_0\sin^2\alpha_0}\,,$$

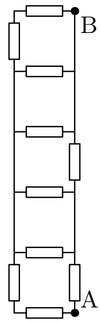
což dává číselný výsledek $k \doteq 7{,}81$.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FoL.41 ... nechutný odporový mrakodrap 7 bodů

Určete odpor mezi body A a B, jestliže má každý rezistor odpor $R = 3141{,}59\,\Omega$.

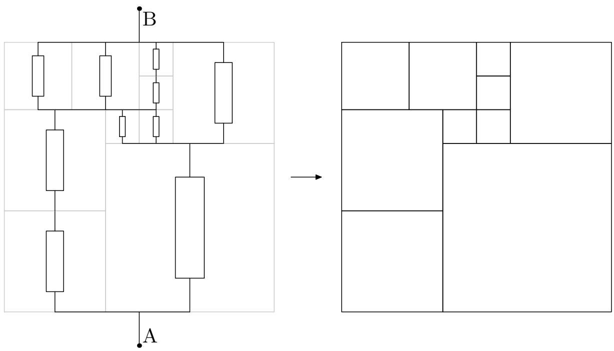
Matěj vzpomínal na přípravu na FO.



Úlohu lze řešit klasickým postupem podle pravidel o skládání odporů[2] nebo podle Kirhoffových zákonů. Došli bychom ke stejným výsledkům, ale tyto postupy zde neuvedeme kvůli zdlouhavosti a kvůli tomu, že řešených příkladů těmito postupy je opravdu hodně.

My si řešení dokážeme netradičním, ale rychlejším postupem pro tento konkrétní příklad. Obvod si nejdříve překreslíme do ekvivalentního tvaru na obrázku 2. Schválně jsme zakreslili odpory různě velké, protože si můžeme povšimnout, že každý odpor odpovídá jednomu čtverečku na obrázku 2. Představíme si, že celkový čtverec na obrázku 2 je tvořen materiálem s konstantní plošnou vodivostí. Přivedeme-li napětí mezi jeho horní a spodní stranu,[3] bude díky homogenitě odpovídat každá horizontální čára vodiči v původním zapojení rezistorů, tedy ekvipotenciále. Z toho plyne, že výška každého podčtverce odpovídá napětí na daném rezistoru. Analogicky šířka čtverce[4] odpovídá proudu procházejícímu daným čtvercem, respektive rezistorem. Jelikož to jsou všechno čtverce, je na každém rezistoru stejný poměr napětí a proudu, a tedy všechny rezistory mají stejný odpor. To splňuje zadání. Z obrázku potom plyne, že celkový odpor obvodu je roven odporu jednoho rezistoru, protože celkový čtverec má taky stejný poměr stran.

Pozn. při tomto postupu je nutno dodržovat pravidla, že poměr stran jednotlivých obdélníků (v našem případě to všechno jsou čtverce) je úměrný odporu na příslušném rezistoru a obdélníky musí tvořit jeden velký obdélník bez děr. Jinak tento postup nelze použít takto jednoduše. Výsledný odpor pak odvodíme z poměru stran celkového obdélníku. Přesně opačným postupem k výše uvedenému byla tato úloha vytvořena, a proto je snadné aplikovat tento postup opačně, v obecném případě to však nemusí platit.



Obr. 2: Ekvivalentní tvar obvodu

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

[2] Bylo by potřeba použít i záměnu hvězda-trojúhelník.
[3] Myšleno tak, že na obě celé strany přiložíme vodič na daném napětí.
[4] Obecně by se nám mohlo stát, že se zde budou vyskytovat i obdélníky.

Úloha FoL.42 ... manévr 6 bodů

Sedíme v raketě na kruhové oběžné dráze kolem hvězdy a chceme se dostat na kruhovou dráhu s dvojnásobným poloměrem. Provedeme proto specifický manévr, při kterém si raketa udržuje konstantní sklon $\theta = 5^\circ$ vůči tečně k lokální kruhové dráze a konstantní velikost rychlosti. Kolik oběhů raketa vykoná (nemusí jít o celé číslo), než se dostane do kýžené vzdálenosti?

Mirek vymyslel příliš těžkou úlohu do Náboje Junior.

Úlohu budeme řešit v polárních souřadnicích (r, φ). Vektor rychlosti je dán vztahem $\boldsymbol{v} = v_0(\sin\theta, \cos\theta)$, kde v_0 je konstanta udávající velikost rychlosti. Pro pohyb v radiálním směru v závislosti na čase (parametru) t máme jednoduchou diferenciální rovnici

$$\mathrm{d}r = v_0 \sin\theta \mathrm{d}t$$

s řešením $r(t) = r_0 + v_0 t \sin\theta$, kde r_0 je počáteční radiální vzdálenost. Do vzdálenosti $2r_0$ dorazíme za čas $\tau = r_0 / (v_0 \sin\theta)$. Pohyb v tangenciálním směru je popsán diferenciální rovnicí

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{v_0 \cos\theta}{r(t)} \mathrm{d}t\,.$$

Za čas potřebný k přesunu do dvojnásobné vzdálenosti se v úhlové souřadnici posuneme o

$$\Delta\varphi = \int_0^\tau \mathrm{d}\varphi = \int_0^\tau \frac{v_0\cos\theta}{r_0 + v_0 t \sin\theta} \mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\theta} \left[\ln\left(r_0 + v_0 t \sin\theta\right)\right]_0^\tau = \frac{\ln 2}{\mathrm{tg}\,\theta}\,.$$

Během manévru vykonáme $\Delta\varphi/(2\pi) = 1{,}26$ oběhů. K řešení lze také snadno dospět tím, že si uvědomíme, že spirála s konstantním sklonem se nazývá logaritmická spirála a je popsána rovnicí

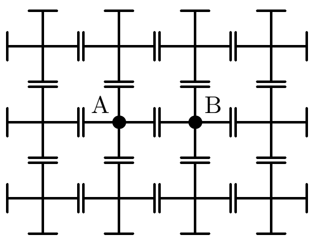
$$\ln r = \ln a + b\varphi\,,$$

kde a je zde nepodstatná konstanta a $b = \mathrm{tg}\,\theta$, což nahlédneme diferenciací vztahu.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.43 ... kondenzátorová síť 6 bodů

Mějme nekonečnou čtvercovou síť ze stejných kondenzátorů o kapacitě $C = 100{,}0\,\mu\mathrm{F}$, jejíž část je zobrazena na obrázku. Spočítejte celkovou kapacitu mezi dvěma sousedními vrcholy.



Matěj chce mít doma nekonečnou síť.

Úlohu je vhodné řešit trikově, jako prakticky každou úlohu obsahující nekonečný počet součástek s nějakou symetrií. Využijeme principu superpozice elektrického náboje. Úlohu si rozdělíme na dva případy, které potom složíme.

V prvním případě dodáme vnější náboj Q do bodu A (s bodem B zatím nic neprovádíme), tento náboj se rozloží rovnoměrně mezi čtyři příslušné kondenzátory, protože je celá situace zcela symetrická k otočení o $90\,^\circ$. Na každém z těchto čtyř kondenzátorů bude náboj $Q/4$, tedy na straně spojené s bodem A bude náboj $Q/4$ a na opačné straně se indukuje náboj $-Q/4$.

V druhém případě přivedeme na bod B náboj $-Q$ a s bodem A nic neprovádíme. Analogicky tak vznikne na čtyřech příslušných kondenzátorech náboj $-Q/4$.

Nyní tyto dvě situace spojíme. Princip superpozice říká, že náboj, potenciál a další elektromagnetické veličiny jsou aditivní, a tedy když sečteme několik různých řešení,[5] dostaneme znovu validní řešení našeho problému. Z toho vyplývá, že pokud do bodu A přivedeme náboj Q a do bodu B náboj $-Q$, bude pak na kondenzátoru, který přímo spojuje tyto body, náboj $Q/2$ (tj. součet $Q/4$ a $-(-Q/4)$, kde jsme změnili znaménko, protože na opačné straně kondenzátoru se indukuje opačný náboj). S využitím vzorečku pro kapacitu kondenzátoru vypočteme napětí mezi body A a B

$$U_{\mathrm{AB}} = \frac{Q}{2C}\,.$$

Připojíme-li celou síť v bodech A a B do elektrického obvodu, bude se chovat jako jeden velký kondenzátor s kapacitou C_{clk}. Tuto kapacitu snadno dopočítáme, protože známe napětí mezi těmito body, když je na ně přiveden náboj Q

$$C_{\mathrm{clk}} = \frac{Q}{U_{\mathrm{AB}}} = 2C = 200{,}0\,\mathrm{\mu F}\,.$$

Po hlubším zamyšlení si můžeme uvědomit, že pokud nekonečná síť obsahuje symetrii, závisí kapacita mezi sousedními vrcholy pouze na počtu spojů N vycházejících z každého vrcholu jako $C_{\mathrm{clk}} = \frac{N}{2}C$. V našem případě $N = 4$. Pokud by vás zajímalo, jak by se řešil podobný problém, ale v trojúhelníkové síti a s rezistory místo kondenzátorů, můžete se podívat do archivu na úlohu EG z Fyziklani2019.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha FoL.44 ... čtvrtá rychlost 5 bodů

Rozdělení velikostí rychlostí částic v plynu je popsáno Maxwellovým-Boltzmannovým rozdělením

$$f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{M}{RT}\right)^{3/2} v^2 \mathrm{e}^{-\frac{Mv^2}{2RT}}\,.$$

Nějakou průměrnou velikost rychlosti můžeme určit více způsoby. Definujeme nejpravděpodobnější rychlost $v_{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$, střední absolutní rychlost $v_{\mathrm{s}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ a střední kvadratickou rychlost $v_{\mathrm{k}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$. Pro kyslík O_2 při teplotě $20\,^\circ\mathrm{C}$ mají tyto velikosti rychlostí popořadě hodnoty $390\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $440\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $478\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Můžeme však také spočítat n-tý moment Maxwellova-Boltzmannova rozdělení pro jakékoliv n a tak zjistit nějakou další průměrnou rychlost. Jaká je

[5] V tomto případě myslíme řešením takové rozložení náboje, které je stabilní.

hodnota střední kubické absolutní rychlosti kyslíku při stejných podmínkách?

Jindrovi vletěla molekula kyslíku do oka.

Střední kubickou rychlost zjistíme tak, že spočítáme třetí moment Maxwellova-Boltzmannova rozdělení a uděláme z něj třetí odmocninu

$$v_{\mathrm{ku}} = \sqrt[3]{\int_0^\infty v^3 f(v) \mathrm{d}v}\,,$$

$$v_{\mathrm{ku}} = \sqrt[6]{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{M}{RT}\right)^{1/2} \sqrt[3]{\int_0^\infty v^5 \mathrm{e}^{-\frac{Mv^2}{2RT}} \mathrm{d}v}\,,$$

$$\text{substituce:} \quad \tfrac{Mv^2}{2RT} = t \qquad \Rightarrow \qquad v^2 = \frac{2RTt}{M}\,,$$

$$\tfrac{Mv}{RT} \mathrm{d}v = \mathrm{d}t\,,$$

$$v\mathrm{d}v = \frac{RT}{M} \mathrm{d}t\,,$$

$$v_{\mathrm{ku}} = \sqrt[3]{4} \sqrt[6]{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{RT}{M}\right)^{1/2} \sqrt[3]{\int_0^\infty t^2 \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t}\,.$$

V integrálu pod odmocninou jste nejspíš poznali gama funkci. Gama funkce je zobecněním faktoriálu na všechna reálná (vlastně i komplexní) čísla kromě nuly a záporných celých čísel, pro která není definovaná. Gama funkce má předpis $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$. A co má společné s faktoriály? Pokud je n přirozené číslo, pak platí $\Gamma(n) = (n-1)\,!$. Integrál pod odmocninou je $\Gamma(3) = (3-1)\,! = 2$.

$$v_{\mathrm{ku}} = 2 \sqrt[6]{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{RT}{M}\right)^{1/2}$$

Po dosazení

$$v_{\mathrm{ku}} = 512\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

Střední kubická rychlost molekul kyslíku je $512\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha FoL.45 ... uvnitř kulového zrcadla 6 bodů

Představme si dvě souosá vydutá zrcadla, jejichž povrchy jsou částmi jedné pomyslné kulové slupky o poloměru $r = 1\,\mathrm{m}$. Když doprostřed umístíme bodový zdroj, obě zrcadla ho po prvním odrazu zobrazí na sebe sama. Do jaké vzdálenosti od středu musíme zdroj umístit, aby se zobrazil sám na sebe po třech odrazech (ale ne po prvním odrazu)?

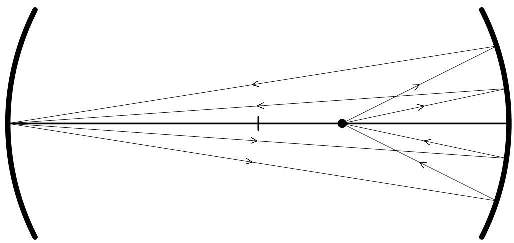
Matěj se inspiroval videem od Vsauce.

Představíme si optickou osu procházející středem koule a zdrojem, který je vzdálený x od středu. Dutou kouli si nahradíme dvěma vydutými zrcadly ve vzdálenostech r od středu. Je zřejmé, že jejich ohnisková vzdálenost bude $\frac{r}{2}$.

K řešení úlohy využijeme symetrii. Po prvním odrazu vznikne obraz ve vzdálenosti r od středu koule na opačné straně, než je zdroj (tedy přesně ve středu druhého kulového zrcadla). Druhý odraz potom vyšle paprsky právě opačným směrem, než k němu přišly, čímž se první obraz zobrazí sám na sebe (protože leží přímo na povrchu zrcadla). Třetím odrazem jsou paprsky vráceny zpět do zdroje. Můžeme psát zobrazovací rovnici

$$\frac{1}{r-x}+\frac{1}{2r}=\frac{2}{r}\,,$$

jejíž řešením je $x=\frac{r}{3}$.



Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha FoL.46 ... rotační strom 5 bodů

Jáchym pokácel strom, který můžeme aproximovat tenkým homogenním válcem o délce $l = 30{,}0\,\mathrm{m}$. Strom je ještě částečně spojený s pařezem, takže jeho vrchol během pádu opisuje část kružnice. Ve vzdálenosti $l/9$ od místa dotyku stromu a pařezu leží limitně nízký kámen. Těsně předtím, než by strom narazil do země, narazí dokonale nepružně do kamene, přičemž se přetrhne poslední spojení s pařezem a strom se dále pohybuje nezávisle. Jakou rychlostí narazí špička stromu na zem? Spojení s pařezem ani jeho přetržení není spojeno s žádnými ztrátami energie. *Jáchym letos půjde do lesa pro vánoční stromek.*

Moment setrvačnosti stromu kolem vodorovné osy procházející pařezem je

$$J_0=\frac{1}{3}ml^2\,,$$

kde m je hmotnost stromu. Během pádu klesne jeho těžiště z výšky $h = l/2$ až těsně nad zem, čemuž odpovídá pokles potenciální energie o $E = mgh$. Tato energie se přemění na rotační energii, čili pro úhlovou rychlost stromu těsně před dopadem platí

$$\omega_0=\sqrt{\frac{2E}{J_0}}=\sqrt{\frac{3g}{l}}\,.$$

V okamžiku nárazu na kámen se ztratí nějaká energie, nicméně se zachová moment hybnosti vzhledem k ose procházející bodem nárazu, označme ho L. Tento bod se zastaví, čili se kolem něj strom začne otáčet. Označme moment setrvačnosti takového pohybu J, potom bude úhlová rychlost pohybu kolem bodu nárazu

$$\omega = \frac{L}{J}\,.$$

Rychlost špičky stromu už spočítáme snadno jako $v = \omega\,(l - a)$, kde $a = l/9$. Těsně před dopadem je rychlost úseku stromu ve vzdálenosti x od pařezu rovna $\omega_0 x$. Úsek stromu o délce $\mathrm{d}x$ má tedy hybnost $\mathrm{d}p = \lambda\omega_0 x \mathrm{d}x$, kde $\lambda = m/l$ je délková hustota. Moment hybnosti vůči bodu ve vzdálenosti a od pařezu bude

$$L = \int_0^l (x - a)\,\mathrm{d}p = \int_0^l x\mathrm{d}p - a \int_0^l \mathrm{d}p = L_0 - a\,\lambda \int_0^l \omega_0 x \mathrm{d}x = L_0 - a\,\lambda\omega_0 \frac{l^2}{2} = L_0 - \frac{1}{2} alm\omega_0\,,$$

kde L_0 představuje původní moment hybnosti $J_0\omega_0$. Nový moment setrvačnosti spočítáme jako

$$J = \int_0^l (x - a)^2\,\mathrm{d}m = \lambda \int_0^l (x - a)^2\,\mathrm{d}x = J_0 - alm + a^2 m\,.$$

Nyní už jen dáme všechny vzorce dohromady a můžeme psát výsledek

$$v = \omega\,(l - a) = \frac{L}{J}\,(l - a) = \frac{L_0 - \frac{1}{2} alm\omega_0}{J_0 - alm + a^2 m}\,(l - a) = \frac{20}{19}\omega_0 l = \frac{20}{19}\sqrt{3gl} \doteq 31{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Špička stromu dopadne na zem rychlostí $31{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FoL.47 ... neutronový skřipec 7 bodů

Jak blízko k povrchu neutronové hvězdy se může (volným pádem) přiblížit ocelová tyč , která je orientovaná směrem ke hvězdě, než se přetrhne? Uvažujte hvězdu o hmotnosti $M = 1{,}80 M_\odot$ a poloměru $R = 10{,}0\,\mathrm{km}$ a tyč s pevností v tahu $\sigma = 800\,\mathrm{MPa}$, hustotou $\varrho = 7\,900\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a délkou $L = 1{,}00\,\mathrm{m}$. Zanedbejte deformaci tyče před přetržením a uvažujte newtonovskou fyziku. *Dodo četl sci-fi z roku 1967.*

Známou podobnou úlohou je určení maximální délky zavěšeného válce z daného materiálu, při které nedojde k jeho přetržení v důsledku tíhové síly na něj působící. V našem případě je tyč „zavěšená“ ve svém těžišti a napínána slapovými silami. Z rozdílu gravitačních zrychlení působících ve výšce h nad hvězdou na dva body vzdálené l od sebe získáme

$$a = \frac{GM}{(r + h)^2} - \frac{GM}{(r + h + l)^2} \approx \frac{GM}{(r + h)^3} 2l\,,$$

což je hledané slapové zrychlení.

Celkovou sílu působící na materiál v těžišti určíme integrací po vrstvách tloušťky $\mathrm{d}x$ a hmotnosti $\mathrm{d}m = \varrho S\,\mathrm{d}x$, kde S je průřez tyče. Na situaci nahlížíme z těžiště tyče, v němž položíme

$x = 0$. Přitom předpokládáme, že nehomogenita pole je natolik malá, abychom mohli předpokládat, že se těžiště tyče nachází v polovině její délky

$$F = \int_0^{\frac{L}{2}} a\mathrm{d}m = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{GM\mathrm{d}m}{(r+h)^3} 2x = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{GM\varrho S}{(r+h)^3} 2x\mathrm{d}x\,,$$

$$F = \frac{GM\varrho S}{(r+h)^3} x^2 \bigg|_0^{\frac{L}{2}} = \frac{GM\varrho S}{4(r+h)^3} L^2\,.$$

Na vzdálenější polovinu tyče působí síla F směrem od hvězdy a na bližší polovinu působí symetricky síla F směrem k hvězdě. Pevnost v tahu a síla jsou spolu vztaženy skrze výraz $F = \sigma S$, po dosazení za sílu tedy můžeme vyjádřit h a pro $r = R$ definovat kritickou vzálenost od povrchu

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM\varrho L^2}{4\sigma}} - R \doteq 74\,\mathrm{km}\,.$$

Ještě si ověříme naše aproximace. V první aproximaci se dopouštíme relativní chyby řádu 10^{-5}, aproximaci těžiště jakožto středu tyče pak ověříme následovně. Vypočítáme „moment“ rozložení působící síly M_x okolo středu tyče

$$M_x = \int a(x)x\mathrm{d}m \approx \int_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(F(0) + \frac{GM}{(r+h)^3} 2x\right) \varrho S x\mathrm{d}x$$

$$M_x = 0 + \frac{2GM}{3(r+h)^3} \varrho S x^3 \bigg|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{GM}{6(r+h)^3} \varrho S L^3\,.$$

V těžišti by tato hodnota měla být nulová. Pro srovnání ji můžeme porovnat s momentem tyče v homogenním poli a okolo bodu posunutého vůči středu o $s \ll L$

$$M_x(s) = \int_{\frac{-L}{2}-s}^{\frac{L}{2}-s} a\ \varrho S x\mathrm{d}x = a\varrho S \left(\left(\frac{-L}{2} - s\right)^2 - \left(\frac{L}{2} - s\right)^2\right) \approx a\ \varrho S 2Ls\,.$$

Porovnáním s výše uvedeným výrazem pro slapové zrychlení $a = \frac{GM}{(r+h)^2}$ máme pro s

$$s = \frac{L^2}{12(r+h)} \approx \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}\,.$$

Vidíme tedy, že aproximace použité v řešení jsou oprávněné. S aproximacemi použitými v zadání je to horší, jelikož vzdálenost od středu neutronové hvězdy odpovídá asi 17 Schwarzschildovým poloměrům této hvězdy (bylo by tedy potřeba ověřit důsledky relativistických efektů), a ocel se před přetržením může prodloužit až o desítky procent.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha FoL.48 ... opalovačka 6 bodů

Průměrný sluneční výkon dopadající na povrch Země osciluje s periodou zhruba 11 let. Velkou část variace výkonu tvoří změny v UV části spektra. Předpokládejte pro účely této úlohy, že Slunce během solárního maxima vyzařuje jako černé těleso o teplotě $T = 5{,}800\,\mathrm{K}$ a v minimu se spektrální charakteristika změní tak, že z maximové charakteristiky zcela vyřízneme oblast vlnových délek 10 až 300 nm. Určete, o kolik procent poklesl celkový výkon mezi maximem a minimem. *Mirek vymýšlí úlohy během konference.*

Vyzařování černého tělesa je popsáno Planckovým zákonem, který udává specifickou spektrální intenzitu záření vztahem

$$I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}} - 1}\,.$$

Jelikož chceme jen porovnat dva výkony z různých frekvenčních intervalů, stačí nám integrovat pouze přes frekvence (tj. nepočítáme přímo výkon, ale výkon do jednotkového prostorového úhlu dopadající na jednotkovou plochu). Můžeme také zanedbat konstantu před integrálem a místo frekvence dosazovat energii v elektronvoltech. Hledaný pokles výkonu je tedy dán výrazem

$$\delta P = \frac{\int_{x_0}^{x_1} \frac{x^3\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - 1}}{\int_0^\infty \frac{x^3\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - 1}}\,,$$

kde horní a dolní mez proměnné x získáme z převodu vlnové délky

$$x = \frac{hc}{\lambda k_\mathrm{B} T}\,.$$

Ve jmenovateli výrazu pro pokles výkonu rozpoznáme definici ζ-funkce, jmenovatel je tedy roven $\Gamma(4)\zeta(4) = \pi^4/15$. Podrobnější odvození je

$$\int_0^\infty \frac{x^3\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - 1} = \int_0^\infty x^3\mathrm{e}^{-x}\sum_0^\infty \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = \sum_0^\infty (n+1)^{-4}\int_0^\infty ((n+1)\,x)^3\,\mathrm{e}^{-(n+1)x}\mathrm{d}\,(n+1)\,x = $$
$$= \sum_1^\infty n^{-4}\Gamma(4) = \Gamma(4)\zeta(4)\,.$$

Čitatel můžeme vyčíslit v aproximaci

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{x^3\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - 1} \approx \int_{x_0}^\infty \frac{x^3\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{-x_0}\left(x_0^3 + 3x_0^2 + 6x_0 + 6\right)\,,$$

neboť platí $x_0 \doteq 8{,}269 \gg 1$ a $x_1 \gg x_0$. Ve výsledku máme $\delta P \doteq 3{,}3\,\%$.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.49 ... ďábelská pružina 8 bodů

Gumička (rovná, necyklická) s klidovou délkou $l = 9{,}57\,\mathrm{cm}$, tuhostí $k = 11{,}08\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$, hmotností $m = 24{,}53\,\mathrm{g}$ a s průřezem $S = 5{,}70\,\mathrm{cm^2}$ je za spodní konec připevněná k podložce (není svisle přilepená, spodní konec se pouze nemůže vzdálit od podložky). Nyní veškeré okolí pružinky zaplníme vodou o hustotě $\varrho = 998\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Na jaké délce se gumička ustálí? Předpokládejte, že gumička při natahování zvětšuje svůj objem tak, že její průřez zůstává konstantní.

Mysleli jste si, že zlá pružina z minulého ročníku byla těžká? Tohle je teprve ďábelské. – Jáchym

Hustota pružiny je $m/lS \doteq 450\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} < \varrho$, v ustáleném stavu se tedy pružina bude svisle vznášet při podložce.

Pro počáteční stav (bez vlivu vnějších sil) zavedeme souřadnici x s počátkem u spodního konce pružiny, pro koncový stav použijeme podobnou souřadnici y. Nyní hledáme funkci $y(x)$, která části původní pružiny na souřadnici x přiřazuje její vzdálenost od podložky po ponoření do vody. Řešením úlohy pak bude hodnota $y(l)$.

Pro úsek na souřadnici x (ve výšce $y(x)$) platí, že je nahoru natahován silou, která odpovídá vztlakové síle působící na celý zbytek pružiny nad ním. Matematicky zapsáno

$$F_\mathrm{v}(x) = S\varrho g\left(y(l) - y(x)\right) .$$

Na tento zbytek pružiny však působí i tíhová síla. Ta ovšem místo na objemu, který je přímo úměrný délce po ustálení, závisí na délce původní části. Zřejmě platí

$$F_g(x) = mg\frac{l-x}{l} .$$

Poslední silou, která na zbytek pružiny působí (směrem dolů), je síla pružnosti. Jestliže měl daný úsek původně velmi malou délku Δx, můžeme ho modelovat pružinkou s tuhostí[6]

$$k_{\Delta x} = k\frac{l}{\Delta x} .$$

Nyní má délku $\Delta y \approx y(x+\Delta x) - y(x)$, což odpovídá síle

$$F_\mathrm{p}(x) = k_{\Delta x}\left(\Delta y - \Delta x\right) = kl\left(y'(x) - 1\right)$$

v limitě $\Delta x \to 0$. Výslednice všech sil musí být nulová, což vede na jednoduchou diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} F_\mathrm{v} - F_g &= F_\mathrm{p} , \\ S\varrho g\left(y(l) - y(x)\right) - mg\frac{l-x}{l} &= kl\left(y'(x) - 1\right) , \\ y'(x) + Ay(x) &= \frac{B}{l}x + Ay(l) - B + 1 , \end{aligned}$$

kde jsme pro zjednodušení použili substituce

$$A = \frac{S\varrho g}{kl} ,$$
$$B = \frac{mg}{kl} .$$

[6] Dokázat to můžeme tak, že si pružinu natahovanou silou F rozdělíme na dvě menší, které na sebe navzájem musí působit stejnou silou F.

Homogenním řešením je

$$y_{\mathrm{H}} = C\mathrm{e}^{-Ax}\,,$$

kde C je nějaká konstanta. Partikulární řešení hledáme ve tvaru polynomu stupně jedna, neboli $y_{\mathrm{P}} = ax + b$. Dosazením dostáváme

$$\begin{aligned} a\ + Aax + Ab &= \frac{B}{l}x + Ay(l) - B + 1\,,\\ a\ &= \frac{B}{Al} = \frac{m}{S\varrho l}\,,\\ b &= y(l) + \frac{1}{A}\left(-B + 1 - \frac{B}{Al}\right)\,. \end{aligned}$$

Výsledkem je

$$y = y_{\mathrm{H}} + y_{\mathrm{P}} = C\mathrm{e}^{-Ax} + ax + b\,,$$

kde konstantu C určíme z podmínky $y(0) = 0$. Vychází $C = -b$, takže

$$y = -b\mathrm{e}^{-Ax} + ax + b\,.$$

Dále musí platit, že dosazením $x = l$ dostaneme $y(l)$. To vede na vztah

$$y(l) = \frac{1}{A}\left(B + \left(1 - \frac{B}{Al}\right)\left(\mathrm{e}^{Al} - 1\right)\right) = \frac{m}{S\varrho} + \frac{k}{S\varrho g}\left(l - \frac{m}{S\varrho}\right)\left(\mathrm{e}^{\frac{S\varrho g}{k}} - 1\right) \doteq 11{,}15\,\mathrm{cm}\,,$$

který je řešením úlohy.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha FoL.50 ... náboj a pentagram 9 bodů

Jindra už měl dost rozčilování se s volnými náboji, a proto se rozhodl zkusit magii. Z pravidelného pětiúhelníku o délce strany 1 *vystřihl pentagram, chytil volný bodový náboj* $Q = 1{,}00\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$ *a umístil jej kolmo nad středem pentagramu ve vzdálenosti* $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$. *Jaký je tok elektrické intenzity pentagramem?*

Jindra to stále nevzdává...

Nejdříve si trochu představíme geometrii pentagramu (a zároveň i pětiúhelníku). Vrcholový úhel pravidelného pětiúhelníku má velikost $\frac{3\pi}{5}$. Středový úhel (úhel vrchol-střed-sousední vrchol) má velikost $\frac{2\pi}{5}$. Úhel u vnějšího cípu pentagramu má velikost $\frac{\pi}{5}$. Vnitřní vrcholy pentagramu jsou zároveň i vrcholy menšího pětiúhelníku. Ten bude ještě důležitý. Říkejme mu tedy jednoduše „menší pětiúhelník“. Střed menšího pětiúhelníku splývá se středem velkého pětiúhelníku.

Strana velkého pětiúhelníku má délku 1, takže poloměr kružnice opsané (vzdálenost vrchol-střed) je

$$R_{\mathrm{O}} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{5}}\,.$$

Kružnice vepsaná menšímu pětiúhelníku má poloměr (vzdálenost střed strany-střed)

$$\varrho = R_{\mathrm{O}}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\cos\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}\,. \tag{4}$$

Jelikož víme, že $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ a $\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$,[7] můžeme dosadit do vztahu (4)

$$\varrho = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}} = \frac{\sqrt{5}-1}{8}\cdot\sqrt{\frac{8}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}$$

$$\varrho = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,. \tag{5}$$

Bingo! Vzdálenost náboje od středu pentagramu z je stejná jako poloměr kružnice vepsané menšímu pětiúhelníku ϱ.

Nyní se podíváme, kam míří vektory elektrické intenzity na povrchu pentagramu. Náboj je od středu pentagramu vzdálen o vzdálenost $z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$. Vezměme si bod na povrchu pentagramu, jehož vzdálenost od středu pentagramu je r. Z Pythagorovy věty dostaneme, že tentýž bod je vzdálený $R = \sqrt{z^2+r^2}$ od náboje. Vektor elektrické intenzity v tomto bodě má tedy velikost

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{z^2+r^2}\,.$$

Kolmá složka vektrou elektrické intenzity pak má velikost

$$E_\perp = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{z^2+r^2}\cdot\frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

$$E_\perp = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qz}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\,. \tag{6}$$

Tok elektrické intenzity pentagramem zjistíme, pokud dokážeme spočítat integrál $\int_S E_\perp \mathrm{d}S$ přes plochu pentagramu. Rozdělíme plochu pentagramu na dvě části, aby se nám lépe počítalo. Oblast A je plocha uvnitř kružnice opsané vnitřnímu pětiúhelníku. Tam dokážeme tok elektrické intenzity spočítat snadno. Oblast B je plocha cípů hvězdy za kružnicí opsanou. Kružnice opsaná má poloměr $r_\mathrm{O} = \varrho/\cos\frac{\pi}{5} = 4\varrho/(\sqrt{5}+1)$.

Tok elektrické intenzity oblastí A je stejný jako tok elektrické intenzity kulovým vrchlíkem nad kružnicí.[8] Koule má poloměr $R_\mathrm{K} = \sqrt{r_\mathrm{O}^2+z^2}$. Výška kulového vrchlíku je $h = R_\mathrm{K} - z$. Tok elektrické intenzity je tedy

[7] Opravdu, zkuste dosadit hodnoty do kalkulačky. Jeden z možných způsobů, jak tyto hodnoty goniometrických funkcí odvodit, je využití vztahů pro $\sin 2x$, $\sin 3x$ a $\sin 4x$ získaných z Moivreovy věty na následující rovnost

$$\sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{6\pi}{5} + \sin\frac{8\pi}{5} = 0\,.$$

Tato rovnost vyjadřuje, že když obejdeme pětiúhelník, vrátíme se zpět na stejné místo. Jednotlivé členy si můžete představit jako y-ové složky vektorů stran pětiúhelníku. Po úpravách dostaneme rovnost

$$2\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}(4\cos^2\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{2\pi}{5} - 1) = 0\,.$$

Hodnotu $\cos\frac{2\pi}{5}$ zjistíme vyřešením kvadratické rovnice.

[8] Ponecháváme na čtenáři, aby si pro kontrolu spočítal integrál $\varphi_1 = \int_0^\varrho E_\perp 2\pi r \mathrm{d}r = \frac{Qz}{2\varepsilon_0}\int_0^\varrho \frac{r}{(z^2+r^2)^{3/2}}\mathrm{d}r$. Výsledek vyjde podle očekávání stejně.

$$\varphi_1 = \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{S_{\text{vrchlík}}}{S_{\text{koule}}} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{\sqrt{r_{\mathrm{O}}^2+z^2}-z}{2\sqrt{r_{\mathrm{O}}^2+z^2}}\,.$$

Pokud dosadíme $z = \varrho$ a $r_{\mathrm{O}} = 4\varrho/(\sqrt{5}+1)$

$$\varphi_1 = \frac{Q}{2\varepsilon_0} - \frac{Q}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{5}+1}\right)^2+1}}$$

$$\varphi_1 = \frac{Q}{2\varepsilon_0} - \frac{Q}{2\varepsilon_0}\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{22+2\sqrt{5}}}\,. \tag{7}$$

Tok oblastí B spočítáme tak, že budeme integrovat po kružnicových obloucích v cípech. Jestliže má kružnicový oblouk poloměr r, jeho délka je

$$l_1 = 2r\left(\frac{2\pi}{5} - \arccos\frac{\varrho}{r}\right).$$

Cípů je celkem pět, takže celková délka oblouků je

$$l = r\left(4\pi - 10\arccos\frac{\varrho}{r}\right).$$

Délka l jde od $\frac{2\pi\varrho}{\cos\frac{\pi}{5}}$ pro $r = \frac{\varrho}{\cos\frac{\pi}{5}}$ po $l = 0$ pro $r = \frac{\varrho}{\cos\frac{2\pi}{5}}$. Tok oblastí B spočítáme jako integrál

$$\varphi_2 = \int_{\frac{\varrho}{\cos\frac{\pi}{5}}}^{\frac{\varrho}{\cos\frac{2\pi}{5}}} E_\perp l\,\mathrm{d}r$$

$$\varphi_2 = \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\frac{\varrho}{\cos\frac{\pi}{5}}}^{\frac{\varrho}{\cos\frac{2\pi}{5}}} \frac{r(4\pi - 10\arccos\frac{\varrho}{r})}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r$$

$$\varphi_2 = \frac{Qz}{\varepsilon_0}\int_{\frac{\varrho}{\cos\frac{\pi}{5}}}^{\frac{\varrho}{\cos\frac{2\pi}{5}}} \frac{r}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r - \frac{5Qz}{2\pi\varepsilon_0}\int_{\frac{\varrho}{\cos\frac{\pi}{5}}}^{\frac{\varrho}{\cos\frac{2\pi}{5}}} \frac{r\arccos\frac{\varrho}{r}}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r\,.$$

Oba integrály spočítáme zvlášť

$$\int \frac{r}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r = -\int \mathrm{d}t = -t + C = -\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}} + C$$

$$\text{substituce:}\quad \frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}} = t$$

$$\frac{r\,\mathrm{d}r}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} = -\mathrm{d}t$$

$$\frac{Qz}{\varepsilon_0}\int \frac{r}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r = -\frac{Qz}{\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}} + C\,. \tag{8}$$

Druhý integrál

$$\int \frac{r \arccos \frac{\varrho}{r}}{\left(z^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}r = -\frac{\arccos \frac{\varrho}{r}}{\sqrt{z^2+r^2}} + \int \frac{\varrho}{r\sqrt{z^2+r^2}\sqrt{r^2-\varrho^2}} \mathrm{d}r$$

$$\text{per partes:} \quad u = -\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}} \qquad u' = \frac{r}{\left(z^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$v = \arccos \frac{\varrho}{r} \qquad v' = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}} \frac{-\varrho}{r^2} = \frac{\varrho}{r\sqrt{r^2-\varrho^2}} \,.$$

Řešení integrálu, jenž nám vyšel, nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Máme však štěstí. Víme, že $z = \varrho$. Po dosazení se integrál rázem stává řešitelným. To je magie.

$$\int \frac{\varrho}{r\sqrt{r^4-\varrho^4}} \mathrm{d}r = \frac{1}{\varrho^2} \int \frac{\mathrm{d}r}{\frac{r}{\varrho}\sqrt{\left(\frac{r}{\varrho}\right)^4 - 1}} = \frac{1}{2\varrho} \int \frac{2\frac{r}{\varrho^2}\mathrm{d}r}{\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2\sqrt{\left(\frac{r}{\varrho}\right)^4-1}} = \frac{1}{2\varrho} \int \frac{\sinh t \mathrm{d}t}{\cosh t\sqrt{\cosh^2 t - 1}} =$$

$$\text{substituce:} \quad \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 = \cosh t$$

$$\frac{2r}{\varrho^2}\mathrm{d}r = \sinh t \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\varrho} \int \frac{\mathrm{d}t}{\cosh t} = \frac{1}{2\varrho} \int \sqrt{1-\mathrm{tgh}^2\, t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\varrho} \int \frac{1-\mathrm{tgh}^2\, t}{\sqrt{1-\mathrm{tgh}^2\, t}} \mathrm{d}t = \frac{1}{2\varrho} \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} =$$

$$\text{substituce:} \quad \mathrm{tgh}\, t = y$$

$$\frac{1}{\cosh^2 t}\mathrm{d}t = \mathrm{d}y$$

$$(1-\mathrm{tgh}^2\, t)\mathrm{d}t = \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2\varrho} \arcsin y + C = \frac{1}{2\varrho} \arcsin \mathrm{tgh}\, t + C = \frac{1}{2\varrho} \arcsin \frac{\sqrt{\cosh^2 t - 1}}{\cosh t} + C = \frac{1}{2\varrho} \arcsin \frac{\sqrt{\left(\frac{r}{\varrho}\right)^4 - 1}}{\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2} + C$$

Takže můžeme napsat

$$\int \frac{\varrho}{r\sqrt{r^4-\varrho^4}} \mathrm{d}r = \frac{1}{2\varrho} \arcsin \frac{\sqrt{r^4-\varrho^4}}{r^2} + C$$

a dosadit do původního integrálu

$$\int \frac{r \arccos \frac{\varrho}{r}}{\left(\varrho^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}r = -\frac{\arccos \frac{\varrho}{r}}{\sqrt{\varrho^2+r^2}} + \frac{1}{2\varrho} \arcsin \frac{\sqrt{r^4-\varrho^4}}{r^2} + C \,. \tag{9}$$

Nyní můžeme dát dohromady vztahy (8) a (9) a spočítat tok elektrické intenzity cípy pentagramu.

$$\varphi_2 = \frac{Q\varrho}{\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{\varrho^2+r^2}} + \frac{5}{2\pi}\frac{\arccos\frac{\varrho}{r}}{\sqrt{\varrho^2+r^2}} - \frac{5}{2\pi}\frac{1}{2\varrho}\arcsin\frac{\sqrt{r^4-\varrho^4}}{r^2}\right]_{\frac{\varrho}{\cos\frac{\pi}{5}}}^{\frac{\varrho}{\cos\frac{2\pi}{5}}}$$

Z odmocnin ve jmenovatelích v závorkách můžeme vytknout ϱ a pokrátit jej. Po úpravách (které nebudeme rozepisovat) dostaneme

$$\varphi_2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{5}}}} - \frac{5}{4\pi}\left(\arcsin\sqrt{1-\cos^4\frac{2\pi}{5}} - \arcsin\sqrt{1-\cos^4\frac{\pi}{5}}\right)\right).$$

Můžeme dosadit hodnoty goniometrických funkcí $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ a $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

$$\varphi_2 = \frac{Q}{2\varepsilon_0}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{22+2\sqrt{5}}} - \frac{5}{2\pi}\left(\arcsin\sqrt{\frac{25+3\sqrt{5}}{32}} - \arcsin\sqrt{\frac{25-3\sqrt{5}}{32}}\right)\right).$$

Celkový tok elektrické intenzity zjistíme tak, že sečteme toky φ_1 a φ_2

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{Q}{2\varepsilon_0} - \frac{Q}{2\varepsilon_0}\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{22+2\sqrt{5}}} + \\
&+ \frac{Q}{2\varepsilon_0}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{22+2\sqrt{5}}} - \frac{5}{2\pi}\left(\arcsin\sqrt{\frac{25+3\sqrt{5}}{32}} - \arcsin\sqrt{\frac{25-3\sqrt{5}}{32}}\right)\right) \\
\varphi &= \frac{Q}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{5}{2\pi}\left(\arcsin\sqrt{\frac{25+3\sqrt{5}}{32}} - \arcsin\sqrt{\frac{25-3\sqrt{5}}{32}}\right)\right) \\
\varphi &= \frac{Q}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{5}{2\pi}\arcsin\frac{1}{16}\sqrt{110-2\sqrt{145}}\right) \\
\varphi &= 2{,}87\cdot 10^4\ \mathrm{V{\cdot}m}\,,
\end{aligned}$$

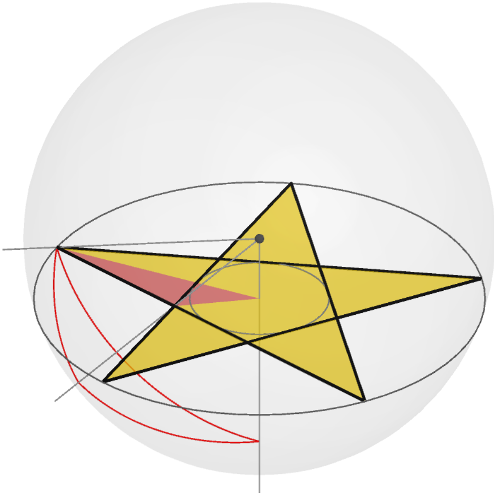
kde jsme využili součtových vzorců pro arkus sinus.

Numerické řešení

Je zřejmé, že předchozí řešení je poměrně výpočetně náročné a zdlouhavé. Jelikož postačuje číselný výsledek, je možné úlohu řešit i numericky. Např. v programu Geogebra můžeme promítnout trojúhelník tvořící jednu desetinu pentagramu na sféru se středem v bodovém náboji, která prochází jeho vrcholy (viz. obrázek). Její poloměr označme r. Geogebra nám vypočítá délky kružnicových oblouků a, b a c, ze kterých pak lze pomocí obdoby Heronova vztahu pro sférický trojúhelník

$$\operatorname{tg}\left(\frac{E}{4}\right) = \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{r}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{r-a}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{r-b}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{r-c}{2}\right)} \tag{10}$$

vypočítat prostorový úhel E, který daný trojúhelník z pohledu bodového náboje zabírá. Na sféře je totiž tok konstantní, takže stačí plochu vynásobit elektrickou intenzitou ve vzdálenosti r, kterou též odčítáme z Geogebry.



Obr. 3: Náčrt situace s nábojem a pentagramem

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha M.1 ... Rickova mikroplaneta (3 body)

Představte si, že se ukrýváte před galaktickou federací na planetě, která má na rovníku stejné gravitační zrychlení jako na Zemi (uvažujte $a_\mathrm{g} = 9{,}83\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$). Stejně tak je to s odstředivým zrychlením (uvažujte $a_\mathrm{o} = 0{,}034\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$). Poloměr planety je přitom pouze $R = 5\,\mathrm{km}$. Jak dlouhý by byl den na této planetě?

Předpokládejte, že planeta je dokonale kulatá a homogenní. Pro výpočet dne zanedbejte dobu oběhu planety kolem hvězdy.

Karla i Matěje zajímalo, kam utekla rodina Ricka a Mortyho.

Vzhledem k tomu, že můžeme zanedbat dobu oběhu planety kolem svého slunce, pak můžeme spočítat délku dne snadno z odstředivé síly $F_o = ma_o = mv_r^2/R = m\omega_r^2 R$, kde v_r je rychlost rotace povrchu planety a ω_r je úhlová rychlost její rotace. Dále platí, že úhlovou rychlost můžeme vyjádřit pomocí periody rotace T jako $\omega_r = 2\pi/T$. Dostáváme

$$a_o = \frac{4\pi^2}{T^2}R \qquad \Rightarrow \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{a_0}} \doteq 40\,\mathrm{min}\,.$$

Doba rotace planety, tedy její den, by trval 40 minut.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha M.2 ... interdimenzionální hustota 3 body

Představte si, že se stále ukrýváte na planetě z předchozí úlohy. Tato planetá má tedy na rovníku stejné gravitační zrychlení jako na Zemi ($a_\mathrm{g} = 9{,}83\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$) i odstředivé zrychlení ($a_\mathrm{o} = 0{,}034\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$), ale přitom má poloměr pouze $R = 5\,\mathrm{km}$. Jaká je hustota této planety?

Předpokládejte, že planeta je dokonale kulatá a homogenní.

Karel se díval na to, kam utekla rodina Ricka a Mortyho.

Hustotu planety získáme z gravitačního zrychlení na jejím povrchu. Pro gravitační zrychlení platí

$$a_g = G\frac{M}{R^2}\,,$$

kde $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{kg^{-1}{\cdot}m^3{\cdot}s^{-2}}$ je gravitační konstanta. Hmotnost si pak můžeme vyjádřit jako $M = \varrho V \ = 4\pi R^3\varrho/3$, kde V je objem planety.

$$a_g = G\frac{4\pi}{3}\varrho R \qquad \Rightarrow \qquad \varrho = \frac{3}{4\pi}\frac{a_g}{GR} \doteq 7{,}04\cdot 10^6\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$$

Tedy hustota planety by musela být zhruba 700krát vyšší než hustota vody. Což by mimochodem odpovídalo celkové hmotnosti planety

$$M = \frac{4}{3}\pi\varrho R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3\frac{3}{4\pi}\frac{a_g}{GR} = \frac{a_g R^2}{G} \doteq 3{,}7\cdot 10^{18}\,\mathrm{kg}\,,$$

což by bylo o více jak 6 řádů menší hmotnost než naší Země.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha M.3 ... squanchy frisbee 4 body

Uvažujte planetu z předchozích úloh, tedy takovou, která má na rovníku stejné gravitační zrychlení jako na Zemi ($a_\mathrm{g} = 9{,}83\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$) i odstředivé zrychlení ($a_\mathrm{o} = 0{,}034\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$), ale přitom má poloměr pouze $R = 5\,\mathrm{km}$. Představte si, že vás už tato planeta nudí, a tak si chcete házet, ale nemáte s kým. Tak na rovníku hodíte těleso směrem na východ, aby oběhlo planetku a vrátilo se vám ze západu. Jak dlouho potrvá, než se vrátí?

Předpokládejte, že planeta je dokonale kulatá a homogenní. Zanedbejte odpor vzduchu. Na této planetě zapadají hvězdy na západě.

Matěj si neměl s kým hrát.

Aby těleso orbitovalo kolem planety, musí nabrat první kosmickou rychlost, pro kterou platí

$$v_\mathrm{k} = \frac{GM}{R} = \sqrt{a_\mathrm{g} R}\,,$$

kde jsme dosadili vztah pro hmotnost planety $M = \frac{a_\mathrm{g} R^2}{G}$. Nesmíme však zapomenout na to, že když stojíme na rovníku, otáčíme se společně s planetou rychlostí $v_\mathrm{o} = \sqrt{a_o R}$. Zkuste se zamyslet nad tím, proč se otáčíme právě směrem na východ. Naši rychlost je tedy třeba od absolutní rychlosti tělesa v_k odečíst. Pro dobu oběhu tedy dostaneme

$$t = \frac{2\pi\sqrt{R}}{\sqrt{a_g} - \sqrt{a_o}} = 150{,}6\,\mathrm{s}\,.$$

Pro zajímavost, těleso by muselo být vrženo rychlostí $v = \sqrt{a_{\mathrm{g}}R} - \sqrt{a_{\mathrm{o}}R} = 208\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, což je více než dvakrát rychleji, než je nejrychlejší zaznamenaný tenisový servis.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha M.4 ... wubba lubba dub dub 4 body

Stále zůstaneme u planety z předchozích úloh, tedy takové, která má na rovníku stejné gravitační zrychlení jako na Zemi ($a_{\mathrm{g}} = 9{,}83\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$) i odstředivé zrychlení ($a_{\mathrm{o}} = 0{,}034\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$), ale přitom má poloměr pouze $R = 5\,\mathrm{km}$. Jak vysoko nad povrchem by byla geostacionární dráha družice, pokud existuje? Pokud neexistuje, vyplňte jako výsledek 0.

Předpokládejte, že planeta je dokonale kulatá a homogenní.

Karel se díval na to, kam utekla rodina Ricka a Mortyho.

Nyní se zaměříme na geostacionární dráhu, tedy takovou, že družice stále obíhá nad rovníkem nad jedním místem. Vyjdeme z rovnosti gravitační a dostředivé síly. Tím určíme vzdálenost od středu planety r, pro kterou bude dráha geostacionární. Pokud bude menší než R, pak planeta geostacionární dráhu nemá. Pokud bude vyšší, můžeme určit její výšku nad povrchem.

$$m\omega^2 r = G\frac{mM}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{GM}{r^3} \qquad \Rightarrow \qquad r^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2}$$

Dosadíme za veličiny tak, abychom mohli dosazovat ty, které jsme měli zadané

$$r^3 = \frac{G}{4\pi^2}\frac{a_g R^2}{G}\frac{4\pi^2 R}{a_o} = \frac{a_g}{a_o}R^3 \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt[3]{\frac{a_g}{a_o}}R \doteq 33\,\mathrm{km}\,.$$

Geostacionární dráha tedy bude existovat, a to ve výšce $r - R \doteq 28\,\mathrm{km}$ nad povrchem naší planety.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha E.1 ... jističe 3 body

Pták Fykosák měl dva měděné válcové dráty o poloměru $r = 1\,\mathrm{mm}$ a rezistivitě $\varrho = 1{,}69\cdot10^{-8}\,\Omega{\cdot}\mathrm{m}$. Chtěl si z nich udělat prodlužovačku, ale při zapojování si dráty popletl a omylem připojil oba konce jednoho drátu do zásuvky, čímž připojil drát nakrátko. Jak dlouhý tento drát musel být, aby tím nevyhodil jističe? V zásuvce je napětí $230\,\mathrm{V}$ a kritický proud jističem je $16\,\mathrm{A}$.

Mišo zkratoval.

Vyjdeme ze vztahu pro odpor R drátu o obsahu průřezu S a délce l

$$R = \frac{\varrho l}{S} = \frac{\varrho l}{\pi r^2}\,,$$

kde jsme dosadili $S = \pi r^2$. Proud vyjádříme z Ohmova zákona

$$I = \frac{U}{R} = \frac{\pi r^2 U}{\varrho l} \qquad \Rightarrow \qquad l = \frac{\pi r^2 U}{\varrho I} \doteq 2\,670\,\mathrm{m}\,,$$

kde jsme dosadili napětí v zásuvce a kritickou hodnotu elektrického proudu. Pokud do zásuvky zapojíme drát delší než 2 670 m, nic by se nemělo stát. Pokud nevěříte, můžete si to doma sami vyzkoušet.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha E.2 ... Fykonači

3 body

Poté, co pták Fykosák přežil zkrat, si začal hrát s rezistory. Spojil body A a B rezistorem $R_1 = 1{,}600\,\Omega$. To se mu ale zdálo moc, a tak je spojil paralelně druhým rezistorem o stejném odporu $R_2 = 1{,}600\,\Omega$. Pořád ale nebyl spokojený, a tak přidal ještě třetí paralelní odpor $R_3 = R_1 + R_2 = 3{,}200\,\Omega$. V ten okamžik se to zvrhlo a začal zuřivě přidávat stále další a další paralelní odpory podle vztahu $R_n = R_{n-2} + R_{n-1}$, kde $n \in N$. Jaký bude finální celkový odpor mezi body A a B? *Jáchyma nebaví fyzika, tak se snaží vymýšlet matematické úlohy.*

Označme n-tý prvek Fibonačiho posloupnosti jako F_n, kde $F_1 = 1$ a $F_2 = 1$. Zřejmě pak platí $R_n = F_n R_1$. Všechny tyto odpory jsou navzájem paralelní, to znamená, že pro celkový odpor R platí

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{R_n} = \frac{1}{R_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}\,.$$

Fibonačiho posloupnost roste přibližně jako exponenciála, takže není vůbec překvapením, že suma jejích převrácených hodnot konverguje. Tuto sumu nemusíme počítat analyticky, její hodnotu lze najít na internetu,[9] nebo jí můžeme spočítat numericky. V každém případě vyjde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n} \doteq 3{,}359886\dots\,.$$

Nyní už snadno zjistíme, že $R = 0{,}4762\,\Omega$.

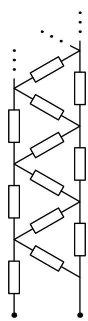
Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha E.3 ... trojúhelníkový žebřík

4 body

Pták Fykosák chtěl vylézt na jistý odporový mrakodrap, který možná také potkáte. Tak si postavil trojúhelníkový žebřík, samozřejmě nekonečný, a celý z rezistorů s odporem $R = 1{,}0\,\Omega$. Vypočítejte odpor mezi jeho nohami.

Lego byl nekonečně smutný, že mu žádná jiná úloha neprošla.



Princíp riešenia nekonečných odporových schém spočíva v tom, že si hľadaný odpor označíme R_v. Potom už len nájdeme v rebríku časť, ktorá je rovnaká ako pôvodný rebrík, pričom nezabúdame, že rebrík je nekonečný.

V našom prípade, ak by sme odpojili prvý zvislý a prvý šikmý odpor, výsledná schéma je rovnaká (len otočená naopak, ale od toho odpor nezávisí; ak by sme odrezali aj ďalšie 2 rezistory, dostaneme rovnaký výsledok, iba to potrvá dlhšie).

[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number

Táto nekonečná schéma teda bude mať odpor R_v. Takže keď pripojíme rezistor s odporom R_v späť k tým dvom rezistorom (čiže paralelne k tomu šikmému), dostávame schému s rovnakým odporom, aký mala tá pôvodná. Potom rovnica pre výslený odpor má tvar

$$R_\mathrm{v} = R + \frac{RR_\mathrm{v}}{R + R_\mathrm{v}}\,,$$
$$0 = R_\mathrm{v}^2 - RR_\mathrm{v} - R^2 \doteq 1{,}62\,R\,.$$

To je kvadratická rovnica, ktorú môžeme jednoducho vyriešiť pomocou diskriminantu. Z dvoch koreňov, ktoré dostaneme, nás pochopiteľne zaujíma ten kladný, ktorého hodnota je

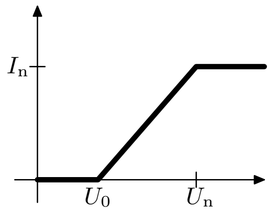
$$R_\mathrm{v} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} R\,.$$

Pritom hodnota zlomku je zlatý rez.

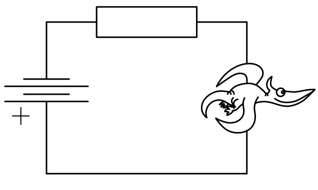
Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha E.4 ... nelineární Fykosák 4 body

Fykosáka už přestalo bavit zapojování rezistorů, a tak zapojil sám sebe do sériového obvodu ke dvěma plochým bateriím, každé s napětím $U_\mathrm{b} = 4{,}50\,\mathrm{V}$, a k rezistoru s odporem $R = 50{,}0\,\Omega$. Pták Fykosák se po zapojení do elektrického obvodu chová jako nelineární součástka s voltampérovou charakteristikou znázorněnou na grafu 4. Otevírací napětí ptáka Fykosáka je $U_0 = 1{,}50\,\mathrm{V}$, nasycovací napětí ptáka je $U_\mathrm{n} = 6{,}00\,\mathrm{V}$ a nasycený proud ptákem Fykosákem je $I_\mathrm{n} = 250\,\mathrm{mA}$. Ve všech třech částech charakteristiky se Fykosák chová lineárně. Určete, jaký proud Fykosákem poteče.



Obr. 4: VA charakteristika



Dodo si o půlnoci vzpomněl na praktikum.

V obvode sa rozdelí napätie na zdroji $U_\mathrm{z} = 2U_\mathrm{b} = 9{,}0\,\mathrm{V}$ medzi napätie na rezistore U_R a napätie na Fykosákovi U_F. Platí

$$U_\mathrm{z} = U_R + U_\mathrm{F}\,.$$

Pre napätie na rezistore máme z Ohmovho zákona $U_R = RI$, kde I je elektrický prúd tečúci obvodom. Po dosadení a vyjadrení I dostávame

$$I = \frac{U_\mathrm{z} - U_\mathrm{F}}{R}\,.$$

Najjednoduchšie sa úloha vyrieši graficky, stačí nájsť priesečník VA charakteristiky a priamky $I(U) = \frac{U_z - U}{R}$. Z takéhoto grafického riešenia je jasné, že priesečník sa nachádza v druhej časti charakteristiky, ktorej rovnica je

$$I = I_\mathrm{n} \frac{U_\mathrm{F} - U_0}{U_\mathrm{n} - U_0} \,.$$

Po dosadení dostávame

$$\frac{U_\mathrm{z} - U_\mathrm{F}}{R} = I_\mathrm{n} \frac{U_\mathrm{F} - U_0}{U_\mathrm{n} - U_0} \,,$$
$$U_\mathrm{F} = \frac{I_\mathrm{n} R U_0 + U_\mathrm{z} \left(U_\mathrm{n} - U_0\right)}{I_\mathrm{n} R + U_\mathrm{n} - U_0} \,,$$

z čoho pre prúd vychádza

$$I = I_\mathrm{n} \frac{U_\mathrm{z} - U_0}{I_\mathrm{n} R + U_\mathrm{n} - U_0} \doteq 110\,\mathrm{mA} \,.$$

Fykosákom teda potečie prúd $110\,\mathrm{mA}$.

Úloha X.1 ... Chernobyl

3 body

Zanedlouho po výbuchu reaktoru č.4 bylo ve vzdálenosti $800\,\mathrm{m}$ *od něj naměřeno 5 roentgenů za hodinu. Kolik by bylo naměřeno* $200\,\mathrm{m}$ *od reaktoru? Neuvažujte vliv vzduchu a prostředí na šíření radioaktivního záření.* *Matěj sledoval seriál.*

Vyjdeme z klasického faktu, že dávka záření závisí na druhé mocnině vzdálenosti, tedy při zčtyřnásobení vzdálenosti od zdroje se dávka sníží 16krát, proto

$$16 \cdot 5\,\mathrm{R{\cdot}h^{-1}} = 80\,\mathrm{R{\cdot}h^{-1}} \,.$$

Ve vzdálenosti $200\,\mathrm{m}$ bude ekvivalentní dávka rovna $80\,\mathrm{R{\cdot}h^{-1}}$.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha X.2 ... hold my graphite

3 body

Nicnetušící hasič vezme do ruky kus grafitu, jehož aktivita je $1{,}00 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Bq}$ *a který ležel opodál bývalého reaktoru. Kolik částic projde do jeho ruky (nebo skrze ni), jestliže hasič drží grafit* $10\,\mathrm{sekund}$*? Uvažujte, že valoun grafitu je kulový o poloměru* $5\,\mathrm{cm}$ *a hasičova ruka pokryje pětinu jeho povrchu, když ho drží. Uvažujte, že každému jadernému rozpadu odpovídá právě jedna částice vyšlá z valounu.* *Matěj sjížděl memy.*

Jednotka becquerel udává, kolik radioaktivních částic dané těleso vyzáří za jednu sekundu. Jednoduše tedy aktivitu pouze vynásobíme časem a nezapomene přitom na faktor jedné pětiny vzhledem k pokrytí tělesa rukou

$$\frac{1}{5} \cdot 10^{10}\,\mathrm{Bq} \cdot 10\,\mathrm{s} = 2 \cdot 10^{10} \,.$$

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha X.3 ... not great, not terrible

3 body

Vypočítejte aktivitu zničeného reaktoru, jestliže ve vzdálenosti 5,00 km *naměříme 10000 částic záření za minutu na čtvereční decimetr. Neuvažujte vliv vzduchu ani okolního prostředí.*

Matěj chtěl dát jako výsledek 3,6 R.

Aktivita udává počet vyzářených částic za jednotku času, dostáváme tedy

$$A = (10\,000\,\mathrm{min}^{-1}{\cdot}\mathrm{dm}^{-2}) \cdot 4\pi(5\,\mathrm{km})^2 \doteq 5{,}24 \cdot 10^{12}\,\mathrm{s}^{-1}\,.$$

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha X.4 ... rádiová-aktivita

3 body

O kolik procent se sníží radioaktivní záření okolo zničené jaderné elektrárny, když kolem ní postavíme 2,00 m *tlustý sarkofág? Předpokládejte, že* 3,00 dm *materiálu, ze kterého je sarkofág postaven, zachytí průměrně* 50,0 % *záření.* *Matěj se bojí o svoji bezpečnost.*

Přes sarkofág projde pouze

$$0{,}5^{2/0{,}3} \doteq 0{,}0098$$

z původního záření. Radioaktivita tedy poklesne o 99,0 %. Dodejme, že sarkofág je postaven primárně proto, aby z elektrárny neunikal radioaktivní materiál do vzduchu.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: http://fykos.cz
e-mail: fykos@fykos.cz

FYKOS je také na Facebooku
http://www.facebook.com/FYKOS

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.