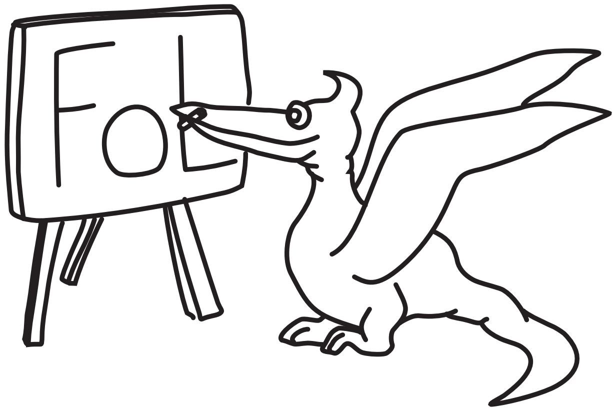
Řešení úloh 8. ročníku Fyziklání online



Úloha FoL.1 ... metro

3 body

Matěj o hmotnosti $m = 70\,\mathrm{kg}$ *nastoupil do metra a na druhé straně vagónu ve vzdálenosti* $s = 20\,\mathrm{m}$ *spatřil kamaráda Jáchyma. Rozhodl se jít za ním. Během celého pohybu se metro rozjíždí se zrychlením* $a = 1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. *Jakou nejmenší práci může Matěj při pohybu vykonat, jestliže jde po směru jízdy?*

Matěj miluje ježdění metrem.

Kdyby metro stálo na místě, nemusel by Matěj vykonat žádnou mechanickou práci, protože počáteční i koncová poloha jsou ve stejné výšce a nemusí překonávat žádnou sílu. Při rozjíždění se ale z metra stává neinerciální soustava. Jelikož Matěj jde ve směru jízdy metra, musí vykonat práci, aby se v metru přesunul. Podle druhého Newtonova zákona získáme sílu, kterou Matěj musí vyvinout ve vodorovném směru, aby nezrychloval, resp. aby si udržel konstantní rychlost

$$F = ma\,.$$

Touto silou musí působit po dráze délky s, a tedy vykoná práci

$$W = Fs = mas = 1\,400\,\mathrm{J}\,.$$

To odpovídá energii obsažené ve zhruba 10 miligramech cukru (zhruba 50 zrnek). Cesta tedy není příliš náročná.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha FoL.2 ... míjející se vlaky

3 body

Danka sledovala, jak kolem ní projíždí vlak, který byl dlouhý $l_1 = 120\,\mathrm{m}$ *a který jel rychlostí* $v_1 = 60\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. *Také zaznamenala, že se z opačného směru blíží vlak rychlostí* $v_2 = 80\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, *ale neznala jeho délku* l_2. *Proto změřila dobu, po kterou se vlaky míjely (tedy časový úsek mezi setkáním začátků a konců vlaků). Naměřila čas* $t = 9\,\mathrm{s}$. *Jak dlouhý byl druhý vlak?*

Danka čekala na vlak.

Úlohu budeme riešiť zo vzťažnej sústavy pevne spojenej s prvým vlakom. V nej sa prvý vlak nehýbe a druhý vlak sa k nemu približuje rýchlosťou $v_1 + v_2$. Aby sa vlaky minuli, musí druhý vlak prejsť vzdialenosť rovnú dĺžke prvého vlaku (vtedy bude začiatok druhého vlaku na konci prvého vlaku) a ešte vzdialenosť rovnú dĺžke druhého vlaku (aby sa minuli konce vlakov). Teda celkovo prejde za čas t vzdialenosť

$$s = l_1 + l_2\,.$$

Platí teda

$$l_1 + l_2 = (v_1 + v_2)t\,.$$

Odtiaľ vyjadríme dĺžku l_2 ako

$$l_2 = (v_1 + v_2)t - l_1 = 230\,\mathrm{m}\,.$$

Druhý vlak mal dĺžku 230 m.

Daniela Pittnerová
`daniela@fykos.cz`

Úloha FoL.3 ... zahrajeme si hru 3 body

Hrajete hru, která sestává z jednotlivých kol. Prohrajete-li kolo, ztratíte bod. Vyhrajete-li kolo, získáte bod. Pokud jste zároveň vyhráli i dvě těsně předcházející kola, získáte navíc další bod jako bonus. Jestliže je pravděpodobnost výhry v libovolném kole 50 % (remíza není možná), jaký je bodový zisk za jedno kolo v dlouhodobém průměru?

Jáchym hraje hru Hearthstone pouze v ranked módu.

Představme si nějaké kolo uprostřed hry. S pravděpodobností 50 % ho prohrajeme a tedy ztratíme bod. S pravděpodobností 50 % ho vyhrajeme a tím získáme bod. Navíc existuje pravděpodobnost 25 %, že jsme vyhráli obě předchozí kola. To nám dává celkem 12,5 % pravděpodobnost zisku bonusového bodu. Celkem tak máme

$$p = 0{,}5 \cdot (-1) + 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}125 \cdot 1 = 0{,}125\,.$$

Za jedno kolo získáme průměrně 0,125 bodu.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FoL.4 ... Táhni, nebo tě zbičuju! 3 body

Při stavbě pyramid byla pro transport obřích kamenných kvádrů používána stará dobrá otrocká síla. Transport probíhá po nakloněné rovině se sklonem $\alpha = 15^\circ$. Pán biče na otroky Jáchym zjistil, že pro vytažení kvádru po cestě nahoru je nutná plná síla patnácti otroků. Pokud ale chce stejný kvádr dopravit dolů, stačí mu zapřáhnout jen pět otroků táhnoucích plnou silou. Určete koeficient tření mezi kvádrem a cestou. Každý otrok je stejně silný a táhne za lano rovnoběžné s rovinou konstantní silou.

Matěj se zajímal o tahání kvádrů.

Hmotnost kvádru označme m a třecí koeficient f. Normálová síla přitlačující kvádr k nakloněné rovině je $mg\cos\alpha$. Třecí síla tedy je $fmg\cos\alpha$. Když otroci táhnou kvádr dolů, pomáhá jim složka tíhové síly $mg\sin\alpha$. Když táhnou ten samý kvádr nahoru, musí překonat navíc právě i tuto složku tíhové síly. Označme F maximální sílu, kterou dokáže vyvinout jeden otrok. Dostaneme dvě rovnice (jednu pro tažení kvádru nahoru, druhou pro tažení kvádru dolů)

$$\begin{aligned} 15F &= fmg\cos\alpha + mg\sin\alpha\,,\\ 5F &= fmg\cos\alpha - mg\sin\alpha\,. \end{aligned}$$

Jejich řešením dostaneme výraz pro koeficient tření f

$$\begin{aligned} fmg\cos\alpha + mg\sin\alpha &= 3fmg\cos\alpha - 3mg\sin\alpha\,,\\ 4\sin\alpha &= 2f\cos\alpha\,,\\ f &= 2\operatorname{tg}\alpha\,. \end{aligned}$$

Po dosazení dostaneme $f \doteq 0{,}536$.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha FoL.5 ... Theofistova teplota 3 body

V pekle mají zavedenou Theofistovu teplotní stupnici. Převodní vztah mezi Theofistovou a Celsiovou stupnicí je lineární. Teplota $100\,^{\circ}\mathrm{T}$ *(stupňů Theofista) je teplota varu síry* $445\,^{\circ}\mathrm{C}$*. Jednou byla v pekle taková zima, že jim ztuhnul parafín. Tehdy na pekelné meteorologické stanici naměřili* $-62\,^{\circ}\mathrm{T}$*, což odpovídá teplotě* $40\,^{\circ}\mathrm{C}$*. Určete teplotu varu rtuti* $357\,^{\circ}\mathrm{C}$ *v pekelné jednotce* $^{\circ}\mathrm{T}$*.* *Na každou svini se vaří rtuť.*

Zaveďme lineárním vztahem $y(^{\circ}\mathrm{T}) = kx(^{\circ}\mathrm{C}) + q$ pro číselné hodnoty převodní vztah mezi teplotními stupnicemi, kde x je teplota ve stupních Celsia, y je teplota ve stupních Theofista a q a k jsou koeficienty. Pak ze soustavy rovnic

$$
\begin{aligned}
100 &= 445k + q\,,\\
-62 &= 40k + q
\end{aligned}
$$

dostaneme $k \doteq 0{,}4$ a $q \doteq -78$. Převodní vztah má tvar $y(^{\circ}\mathrm{T}) = 0{,}4x(^{\circ}\mathrm{C}) - 78$. Dosazením teploty varu rtuti dostaneme $65\,^{\circ}\mathrm{T}$.

Josef Jírů
jiru@gyoa.cz

Úloha FoL.6 ... schody 3 body

Danka nastoupí na horní konec eskalátoru. Stojíc na něm nehybně, eskalátor ji sveze dolů za čas $t_1 = 2{,}0\,\mathrm{min}$*. Pokud by byl eskalátor mimo provoz a Danka by po něm kráčela rovnoměrným pohybem, trvalo by jí dostat se na druhý konec* $t_2 = 2{,}5\,\mathrm{min}$*. Jak dlouho jí bude trvat cesta na druhý konec eskalátoru, pokud eskalátor pojede a Danka v polovině schodů začne kráčet směrem dolů?* *Danka se zamýšlela v metru.*

Označme v_1 rýchlosť pohybu eskalátora a v_2 rýchlosť kráčania Danky. Keď l je dĺžka eskalátora, potom pre rýchlosti platí

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{l}{t_1}\,,\\
v_2 &= \frac{l}{t_2}\,.
\end{aligned}
$$

Označme hľadaný čas t_3. Polovicu cesty bude Danka stáť, teda jej bude tento úsek trvať polovičný čas, ako keby stála celú dobu, čo je $t_1/2$. Druhú polovicu cesty prejde rýchlosťou rovnou súčtu rýchlostí v_1 a v_2. Potom pre čas t_3 platí

$$
\begin{aligned}
t_3 &= \frac{t_1}{2} + \frac{\frac{l}{2}}{v_1 + v_2}\,,\\
t_3 &= \frac{t_1}{2} + \frac{1}{2}\frac{l}{\frac{l}{t_1} + \frac{l}{t_2}}\,,\\
t_3 &= \frac{t_1\,(t_1 + 2t_2)}{2\,(t_1 + t_2)} \doteq 1{,}6\,\mathrm{min}\,.
\end{aligned}
$$

Danke bude cesta dolu trvať $1{,}6\,\mathrm{min}$.

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Úloha FoL.7 ... hokejovo-fotbalová 4 body

Jaká část z původního počtu N_0 částic radioaktivní látky se rozpadne za druhou třetinu prvního poločasu rozpadu? *Čekáme na třetí třetinu Half-Life.*

Počet nerozpadnutých částic po 1. třetině poločasu rozpadu je

$$N_1 = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} ,$$

počet po dvou třetinách

$$N_2 = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} .$$

Během 2. třetiny se z původního počtu rozpadla část

$$\frac{N_1 - N_2}{N_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} ,$$

což je číselně asi 0,1637.

Josef Jírů
`jiru@gyoa.cz`

Úloha FoL.8 ... odporný blok 3 body

Máme $l = 11{,}4\,\mathrm{m}$ drátu válcového průřezu o průměru $d = 0{,}61\,\mathrm{mm}$ a celkovém odporu $R = 19{,}6\,\Omega$, pokud jej zapojíme na protilehlých koncích. Jaký by byl odpor R_a krychle, která by vznikla přetavením tohoto drátu, pokud bychom ji zapojili na protilehlých stěnách pomocí dvou dokonale vodivých desek a nechali jí protékat stejnosměrný proud?
Karel vymýšlel jednoduché úlohy.

Pro odpor válcového drátu délky l a průřezu $S = \pi d^2/4$ platí známý vztah

$$R = \varrho\frac{l}{S} = \varrho\frac{4l}{\pi d^2} ,$$

kde ϱ je rezistivita materiálu, ze kterého je drát vyroben. Tu si z toho vztahu vyjádříme

$$\varrho = \frac{\pi d^2 R}{4l} .$$

Odpor krychle si pak můžeme vyjádřit jako

$$R_a = \varrho\frac{l_a}{S_a} = \frac{\pi d^2 R}{4l}\frac{a}{a^2} = \frac{\pi d^2 R}{4la} ,$$

kde a je délka hrany krychle, $l_a = a$ a $S_a = a^2$. Zbývá určit délku hrany krychle. Tu můžeme určit ze zákona zachování hmotnosti a v našem případě i objemu

$$V_a = V \quad \Rightarrow \quad a^3 = lS \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[3]{\frac{\pi d^2 l}{4}} .$$

Dosadíme a dostáváme

$$R_a = \frac{\pi d^2 R}{4l} \sqrt[3]{\frac{4}{\pi d^2 l}} = \left(\frac{\sqrt{\pi} d}{2l}\right)^{\frac{4}{3}} R \doteq 3{,}36 \cdot 10^{-5}\,\Omega\,.$$

Odpor upravené krychle zapojené na protilehlých stěnách by byl pouhých $3{,}36 \cdot 10^{-5}\,\Omega$. Mimochodem, hrana krychle by byla dlouhá zhruba 1,5 cm.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha FoL.9 ... královnina spravedlnost

3 body

Chudí poddaní nosí vajíčka královně a dostávají za to od ní dukáty. Každé vajíčko má cenu deseti dukátů. Pokud ale poddaný přinese vajíčka za více než 6 700 dukátů, královna mu vyplatí o 1 600 dukátů méně, aby v jejím království velkostatkáři snadno nezbohatli více než ona. Pokud někdo přinese vajíčka v ceně 5 000 až 6 700 dukátů, strhne mu „jen“ 1 000 dukátů z celkové částky. Farmář chová slepičky, které mu každý týden snesou 0 až 1 000 vajíček (rozložení je rovnoměrné). Tato vajíčka každou neděli donese královně. Jaký je jeho průměrný výdělek v dukátech?

Matěj a Jáchym se cítí dobře jako oddaní poddaní.

Bez královniných srážek by byl farmářův výdělek 5 000 dukátů (tj. průměr neboli střední hodnota, jenž jsou u rovnoměrného rozdělení stejné). V 50 % případů žádnou srážku nedostane, protože jeho výdělek bude pod 5 000 (ve skutečnosti je to trochu méně, než 50 %, protože z 10 001 případů nestrhne pouze v 5 000 případech, ale v rámci chyby je to zanedbatelné). Dále je 17% pravděpodobnost, že farmář neprávem přijde o 1 000 dukátů a 33%, že přijde o 1 600. Celkově mu v průměru tedy zůstane

$$5\,000 - 0{,}17 \cdot 1\,000 - 0{,}33 \cdot 1\,600 = 4\,302$$

dukátů.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha FoL.10 ... potápěč

4 body

Potápěč se nachází v hloubce $h = 10\,\mathrm{m}$ pod hladinou. Jak velký je povrch té části hladiny, na které vidí nebe? Index lomu vody je 1,33 a index lomu vzduchu je 1,00.

Šimon vzpomíná na léto.

Vieme, že svetlo sa pri prechode medzi prostrediami láme pomocou Snellovho zákonu lomu

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2\,,$$

kde v našom prípade n_1 je index lomu vody, n_2 je index lomu vzduchu a uhol α_1 je uhol dopadu, meraný od potápača ku kolmici k hladine v bode, kde daný lúč prechádza hladinou. Uhol α_2 je uhol lomu prešlého lúču meraný od kolmice k hladine. Maximálny možný uhol α_2 je $\alpha_2 = 90^\circ$, čomu odpovedá maximálny možný uhol dopadu $\alpha_1 = \alpha_m$. Dosadením do Snellovho zákona a vyjadrením uhlu dostaneme

$$\sin \alpha_\mathrm{m} = \frac{1}{n_1}\,.$$

Zo symetrie úlohy je jasné, že povrch hladiny, na ktorej bude potápač vidieť nebo, je kruh o neznámom polomere r, ktorý sa dá určiť z pravouhlého trojuholníka pomocou goniometrickej funkcie tangens

$$\operatorname{tg} \alpha_\mathrm{m} = \frac{r}{h} .$$

Obsah kruhu je

$$S = \pi r^2 = \pi h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_\mathrm{m} = \pi h^2 \frac{\sin^2 \alpha_\mathrm{m}}{\cos^2 \alpha_\mathrm{m}} = \pi h^2 \frac{\sin^2 \alpha_\mathrm{m}}{1 - \sin^2 \alpha_\mathrm{m}} ,$$

kde sme pri druhej rovnosti prepísali polomer r pomocou hĺbky h, v ktorej je potápač, a maximálneho uhla α_m, pod ktorým vidí nebo. V ďalších krokoch sme prepísali tangens pomocou sínusu, ktorý už máme vyjadrený. Výsledok teda je

$$S = \pi h^2 \frac{1/n_1^2}{1 - 1/n_1^2} = \pi h^2 \frac{1}{n_1^2 - 1} ,$$

čo je číselne asi $409\,\mathrm{m}^2$.

Šimon Knoška
`simon@fykos.cz`

Úloha FoL.11 ... padesátka

3 body

Vašek si seřídil tachometr tak, aby mu ukazoval přesnou rychlost auta podle rychlosti otáčení kol. Má však ojeté pneumatiky o poloměru $35{,}7\,\mathrm{cm}$, a proto přezuje na nové, které mají o $4\,\mathrm{mm}$ větší vzorek. O kolik se bude lišit jeho skutečná rychlost v $\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ od rychlosti na tachometru, která v obci bude $50\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, jestliže si Vašek zapomněl znovu seřídit tachometr?

Vašek dbá na dodržování předpisů.

To, že auto měří rychlost podle rychlosti otáčení kol, přesněji znamená, že je rychlost na tachometru dána úhlovou rychlostí ω otáčení kol. Rychlost v na tachometru odpovídá rychlosti auta s ojetými pneumatikami o poloměru R. Poté, co si Vašek přezuje pneumatiky na nové s poloměrem $R' = R + \Delta R$, pojede rychlostí $v' = \omega R'$, zatímco při stejném údaji na tachometru, a tedy i stejné úhlové frekvenci ω otáčení kol, by jel rychlostí $v = \omega R$. My hledáme rozdíl Δv těchto rychlostí,

$$\Delta v = v' - v = \omega \left(R' - R\right) = v \frac{\Delta R}{R} .$$

Po dosazení číselných hodnot zjišťujeme, že by Vašek takto porušoval předpisy o $0{,}56\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

Václav Mikeska
`v.mikeska@fykos.cz`

Úloha FoL.12 ... Pozor, zatáčka!

3 body

Auto o hmotnosti $m = 1{,}50\,\mathrm{t}$ projíždí zatáčkou s poloměrem $R = 30{,}0\,\mathrm{m}$. Činitel statického smykového tření mezi pneumatikou a cestou je $f = 0{,}55$. Jakou maximální rychlostí může auto zatáčkou projet, aby nedostalo smyk?

Danka projela zatáčkou moc rychle.

Na auto pri prejazde zákrutou pôsobí odstredivá sila

$$F_\mathrm{o} = m\frac{v^2}{R}$$

v smere von zo zákruty. Proti nej pôsobí statická šmyková trecia sila, ktorá je rovnako veľká ako odstredivá sila a kompenzuje ju. Statická trecia sila narastá so zvyšujúcou sa odstredivou silou až po maximálnu hodnotu, ktorá je daná ako

$$F_\mathrm{t,max} = fmg\,.$$

Teda aby auto nedostalo šmyk, musí byť odstredivá sila menšia alebo rovná maximálnej statickej šmykovej trecej sile

$$F_\mathrm{o} < F_\mathrm{t,max}\,,$$

$$m\frac{v^2}{R} < fmg\,.$$

Odtiaľ vyjadríme podmienku pre rýchlosť

$$v < \sqrt{fgR} \doteq 45{,}8\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}\,.$$

Auto môže prejsť zákrutou maximálnou rýchlosťou $45{,}8\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

Daniela Pittnerová
`daniela@fykos.cz`

Úloha FoL.13 ... Planckova délková hustota 5 bodů

*Planckovy jednotky jsou takové fyzikální veličiny, které „poskládáme“ vhodnou kombinací z rychlosti světla $c = 3{,}00{\cdot}10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, redukované Planckovy konstanty $\hbar = 1{,}05{\cdot}10^{-34}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}$ a gravitační konstanty $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{kg^{-1}{\cdot}m^3{\cdot}s^{-2}}$. Můžeme tedy psát $A = c^\alpha \cdot \hbar^\beta \cdot G^\gamma$ a získat takto mnoho různých veličin. Určete tímto zpsobem Planckovu délkovou hustotu, kterou značíme obvykle λ a má jednotky $\mathrm{kg{\cdot}m^{-1}}$. Jako výsledek zadejte **součet** koeficientů $\alpha + \beta + \gamma$.*

Karel rád zkoumá Planckovy jednotky.

Můžeme samozřejmě postupovat doporučenou rozměrovou analýzou. Vyzkoušejme ji. Předpokládáme, že platí

$$\lambda = c^\alpha \cdot \hbar^\beta \cdot G^\gamma\,.$$

Pak musí platit i vztahy mezi jednotkami

$$\mathrm{kg{\cdot}m^{-1}} = \mathrm{m^\alpha{\cdot}s^{-\alpha}{\cdot}kg^\beta{\cdot}m^{2\beta}{\cdot}s^{-\beta}{\cdot}kg^{-\gamma}{\cdot}m^{3\gamma}{\cdot}s^{-2\gamma}}\,.$$

Z toho vyplývá soustava tří rovnic o třech neznámých (pro kg, m a s), kterou můžeme vyřešit

$$\begin{aligned} 1 &= 0\alpha + \beta - \gamma\,,\\ -1 &= \alpha + 2\beta + 3\gamma\,,\\ 0 &= -\alpha - \beta - 2\gamma\,. \end{aligned}$$

Po pár úpravách dostáváme $\alpha = 2$, $\beta = 0$ a $\gamma = -1$, tedy

$$\lambda = \frac{c^2}{G} \doteq 1{,}35 \cdot 10^{27}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-1}}\,.$$

Alternativní postup mohl být např. najít si na internetu vztah pro Planckovu hmotnost a Planckovu délku a veličiny vydělit – výsledek bude stejný a dostáváme ho ještě rychleji

$$\lambda = \frac{m}{l} = \sqrt{\frac{c\hbar}{G}}\sqrt{\frac{c^3}{\hbar G}} = \frac{c^2}{G}\,.$$

Odpověď na otázku ze zadání, kterou jste měli zadat do systému, je tedy 1.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha FoL.14 ... rychlost kapky — 3 body

Vypočítejte, jakou rychlostí dopadají kapky (koule s poloměrem 3 mm) na zem, když prší. Uvažujte turbulentní proudění. Hustota vzduchu je $\varrho = 1{,}25\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a součinitel odporu kulové kapky je $C = 0{,}5$. *Katarína ráda chodí venku v dešti.*

Keď kvapka dažďa dopadá na zem, pôsobí na ňu tiažová sila a odporová sila prostredia. Tiažová sila je $F_G = mg$. Odporová sila prostredia je (pri turbulentnom prúdení) $F_{\mathrm{OD}} = \frac{1}{2}CS\varrho v^2$, závisí od súčiniteľa odporu C, ktorý je konštantou, obsahu plošného prierezu padajúceho objektu S, hustoty prostredia ϱ a rýchlosti padajúceho telesa v.

Súčiniteľ odporu gule je $C = 0{,}50$. Taktiež poznáme plošný prierez kvapky, ktorý vieme vypočítať ako $S = \pi r^2$, pričom r je polomer kvapky. Hustota prostredia je hustota vzduchu, keďže kvapka padá vzduchom. Hmotnosť kvapky vieme vypočítať z jej hustoty a objemu ako

$$m = \varrho_{\mathrm{vody}} V_{\mathrm{kvapky}} = \varrho_{\mathrm{vody}} \frac{4}{3}\pi r^3\,.$$

Pri páde telesa sa mení jeho rýchlosť, čiže sa mení odporová sila, ktorá naň pôsobí. Keď sa odporová sila vyrovná tiažovej sile pôsobiacej na kvapku, na teleso nepôsobí žiadna výsledná sila a pokračuje rýchlosťou, ktorú chceme zistiť.

$$F_{\mathrm{OD}} = F_G \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}CS\varrho v^2 = mg$$

Po upravení nám vyjde vzťah pre rýchlosť kvapky v

$$v = \sqrt{\frac{\varrho_{\mathrm{vody}}\frac{4}{3}2rg}{C\varrho_{\mathrm{vzduch}}}} \doteq 11{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Rýchlosť danej kvapky, keď dopadá na zem, je $11{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Avšak treba, aby kvapka dopadala z dostatočnej výšky na to, aby sa tiažová sila a odporová sila dostali do rovnováhy.

Katarína Častulíková
`katka.castulikova@fykos.cz`

Úloha FoL.15 ... giga-jeskyňka 5 bodů

Představme si, že máme dokonale kulatou a homogenní planetu o poloměru R. Tedy až na jednu dutinu, která je prázdná, má poloměr $R/8$ a nachází se těsně pod povrchem planety. Jaký bude poměr gravitačního zrychlení přímo nad dutinou vůči gravitačnímu zrychlení přesně na druhé straně planety? Zajímá nás oblast těsně nad povrchem planety. *Karel má rád kulaté planety.*

Gravitační působení jednotlivých hmotných těles je aditivní. Naši planetu tedy můžeme modelovat klasickou plnou planetou a menší koulí se zápornou hmotností v místě dutiny. Označme hustotu materiálu planety jako ϱ, potom pro hmotnost plné koule platí

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho\,,$$

zatímco pro menší kouli máme

$$m = -\frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{8}\right)^3 \varrho.$$

Pro gravitační zrychlení přímo nad dutinou dostáváme

$$g_1 = \frac{GM}{R^2} + \frac{Gm}{\left(\frac{R}{8}\right)^2} = \frac{7}{6}\pi R G\varrho\,,$$

pro gravitační zrychlení na druhé straně platí

$$g_2 = \frac{GM}{R^2} + \frac{Gm}{\left(\frac{15R}{8}\right)^2} = \frac{1\,799}{1\,350}\pi R G\varrho\,.$$

Výsledný poměr obou zrychlení je

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{225}{257}\,,$$

což číselně je asi 0,875.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FoL.16 ... Kladkový luk či poloautomatická zbraň? 5 bodů

Vystřelíme přímo proti sobě šíp z kladkového luku PSE X-Force Omen a kulku z koltu 1903 .32 Automatic. Jakým směrem a jakou rychlostí by se pohybovaly tyto střely za předpokladu dokonale nepružné srážky (tj. srážky, ve které se spojí)? Hmotnost šípu je $m_1 = 350\,\mathrm{grain}$ (jak jistě víte, $1\,\mathrm{grain} = 6{,}479 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg}$) a její rychlost je $v_1 = 366\,\mathrm{ft{\cdot}s^{-1}}$ (taktéž $\mathrm{ft{\cdot}s^{-1}}$ neboli stopy za sekundu, tedy $1\,\mathrm{ft{\cdot}s^{-1}} = 0{,}304\,8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$). Hmotnost samotné střely z koltu, tedy 7,65 mm Browning Short, je v použité variantě $m_2 = 65\,\mathrm{grain}$ a její rychlost je $v_2 = 925\,\mathrm{ft{\cdot}s^{-1}}$. Střely považujte za bodové, pro jednoduchost nerotující. V odpovědi uveďte rychlost spojených střel s kladným znaménkem, pokud letí ve směru šípu, se záporným, pokud se dále budou pohybovat ve směru náboje koltu. *Karel přemýšlel nad střelnými zbraněmi.*

Při dokonale nepružném rázu neplatí zákon zachování energie, ale využijeme zákon zachování hybnosti p a toho, že po srážce se pohybují společně stejnou rychlostí w. Za kladný směr volíme směr pohybu šípu, jak je uvedeno v zadání.

$$p = m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) w\,,$$

Vyjádříme si hledanou rychlost

$$w = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} \doteq 164\,\mathrm{ft{\cdot}s^{-1}} \doteq 50\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Jak vidíme, je lepší stát na straně toho, kdo vystřelil z kladkového luku. Šíp „přetlačí“ hybnost náboje a střely dále pokračují docela vysokou rychlostí (cca 45 % původní rychlosti šípu) směrem k tomu, kdo vystřelil z koltu.

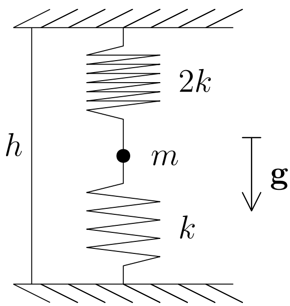
Samozřejmě není moc reálné, že se šíp a kulka střetnou v letu. Pokud by se ale střetly, stejně by se nejspíš nespojily, ale spíše by se na svojí dráze jenom vychýlily. Ještě závěrem poznamenejme, že původní rychlosti v jednotkách asi bližší většině účastníků soutěže jsou $v_1 = 112\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $v_2 = 282\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a kinetické energie odpovídající střelám jsou $E_1 = 141\,\mathrm{J}$ a $E_2 = 167\,\mathrm{J}$.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha FoL.17 ... dvojitá napjatá pružinka 3 body

Máme dvě pružinky se zanedbatelnou hmotností a jeden hmotný bod, který je upevněný pomocí pružinek dle obrázku. Horní pružinka má dvakrát větší tuhost než spodní pružinka. Tuhost spodní pružinky je $k = 5{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-2}}$. Klidová délka obou pružinek je $l_0 = h/4 = 10\,\mathrm{cm}$. Obě se nachází v napjatém stavu. Jakou hmotnost musí mít závaží, aby byly obě v klidu v rovnovážném stavu s délkou $2l_0$, jak vidíme na obrázku? Je zde naznačen i směr působícího tíhového zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Karel varioval Paťovu úlohu z FO SR.



Horní pružinku s tuhostí $2k$ si můžeme rozložit na dvě pružinky se stejnou klidovou délkou a s tuhostí k. Silové působení od jedné z nich se vyruší se silovým působením spodní pružinky. Zbyde tak jen jedna pružinka s tuhostí k a hmotný bod. Prodloužení horní pružinky je $\Delta l = l_0$, máme tedy rovnici

$$mg = \Delta l k = l_0 k\,,$$

odkud dostáváme

$$m = \frac{l_0 k}{g} \doteq 51\,\mathrm{g}\,.$$

Závaží má tedy hmotnost 51 g.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha FoL.18 ... rozehřívací cyklóna 4 body

Hlavní hnací silou cyklón je oceán, respektive teplo odevzdané vypařenou vodou z povrchu oceánu. Tyto částice vodní páry jsou pak za velmi krátký čas vyneseny do horní části cyklóny, kde voda začíná kondenzovat kvůli nižší teplotě prostředí, nižšímu tlaku a kondenzačním jádrům. V poslední části cyklu látka padá směrem k povrchu oceánu ve formě deště (tento *proces též probíhá velmi rychle). Cyklóna tedy pracuje mezi dvěma teplotami – teplota oceánu ($T_1 = 280\,\mathrm{K}$) a teplota v oblacích ($T_2 = -26\,^\circ\mathrm{C}$). Ukazuje se, že při výpočtech můžeme proces modelovat jako cyklický děj s ideálním plynem. S pomocí zadaných informací vypočtěte účinnost modelu cyklóny jako termodynamického stroje s pracovní látkou vodou.*

Vítek si pustil zprávy.

Ze zadání víme, že cyklus má zřejmě 4 větve. Pracovní látka (voda) tedy podstupuje tyto fáze – vypařování, vzestup nahoru, fázový přechod v oblacích a sestup dolů. Fáze 2 a 4, tedy pohyby vody dolů a nahoru, se dějí velmi rychle. Můžeme tedy přepokládat, že v těchto větvích neprobíhá žádná tepelná výměna s okolím ($\Delta Q = 0$). Tyto větve jsou tím pádem adiabatické. Dále víme, že stroj pracuje mezi dvěma konstantními teplotami. To nám implikuje dvě izotermické větve. Získali jsme tedy cyklus sestávající ze dvou izoterm a dvou adiabat. Účinnost stroje tohoto typu je dobře známá – jedná se o Carnotův cyklus. Pišme tedy jednoduše

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \doteq 0{,}12\,.$$

Účinnost je 0,12.

Vít Beran
vit.beran@fykos.cz

Úloha FoL.19 ... déšť

3 body

Začalo pršet a pták Fykosák si všiml, že na západní stěně budovy matfyzu je dvakrát větší hustota kapek (počet dopadů na jednotku plochy) než na jižní stěně. Určete, jakým směrem fouká vítr vzhledem ke směru z jihu na sever. Jde nám o úhlovou odchylku (v intervalu $(0^\circ, 180^\circ)$) od tohoto směru. Uvažujte, že stěny matfyzu jsou dokonale orientované směrem ke svojí světové straně.

Matěj rád sedí v dešti na koleji.

Hustotu kapek na jižní stěně označme σ. Hustota na západní stěně je pak 2σ. Hledáme takový směr, ze kterého se obě hustoty zdají stejné.

Představme si, že kdyby vítr foukal přímo proti stěně, zanechal by zde hustotu kapek σ_0. Pokud směr větru odkloníme o úhel α, hustota kapek na stěně se sníží na $\sigma_0 \cos\alpha$, protože celá stěna je z tohoto pohledu $\cos\alpha$ krát větší (tedy menší), dopadne na ni tedy $\cos\alpha$ krát více kapek (tedy méně, protože $\cos\alpha \leq 1$).

Je-li vítr odkloněný o úhel α ze severního směru, dopadne na jižní stěnu hustota

$$\sigma_0 \cos\alpha$$

a na západní stěnu

$$\sigma_0 \cos(90^\circ - \alpha) = \sigma_0 \sin\alpha\,.$$

Dostáváme tedy soustavu rovnic

$$\sigma = \sigma_0 \cos\alpha\,,$$
$$2\sigma = \sigma_0 \sin\alpha\,.$$

Jejím řešením je

$$\alpha = \mathrm{arctg}\, 2 \doteq 63{,}43^\circ\,.$$

I ze zadání je zřejmé, že vítr fouká přibližně směrem na východo-severovýchod.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha FoL.20 ... házíme si

4 body

Mišo a Dano stojí vedle sebe a ve stejnou chvíli vyhodí každý svůj tenisový míček stejnou rychlostí $v = 15\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Dano vyhodí svůj pod úhlem $\alpha_1 = 45^\circ$ vůči vodorovné rovině a Mišo pod úhlem $\alpha_2 = 35^\circ$. O kolik metrů dál doletí vítězný míček? Uvažujte, že míče letí v navzájem rovnoběžných rovninách a vylétají z nulové výšky. Odpor vzduchu neuvažujte.

Danka vzpomínala na hodiny tělocviku.

Počiatočnú rýchlosť tenisovej loptičky rozložíme do súradníc. Platí

$$v_x = v_0 \cos\alpha\,,$$
$$v_y = v_0 \sin\alpha\,.$$

Položme počiatok súradnicovej sústavy do miesta vyhodenia loptičiek (sú vyhodené zo zeme). Potom pre súradnice loptičiek vyhodené v čase $t = 0\,\mathrm{s}$ platí

$$x = v_x t\,,$$
$$y = v_y t - \frac{1}{2} g t^2\,.$$

Označme vzdialenosť miesta dopadu loptičky od miesta vypustenia d. V čase dopadu t_d budú súradnice loptičky

$$x_d = d = v_x t_d\,,$$
$$y_d = 0 = v_y t_d - \frac{1}{2} g t_d^2\,.$$

Z prvej rovnice vyjadríme t_d

$$t_d = \frac{d}{v_x}\,,$$

dosadíme do druhej rovnice a úpravami dostávame

$$d = \frac{2 v_x v_y}{g}\,,$$
$$d = \frac{2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}\,,$$
$$d = \frac{v^2}{g}\sin 2\alpha\,.$$

Aby sme zistili, o koľko ďalej doletí víťazná loptička, odčítame od seba jednotlivé vzdialenosti dopadu d_1 a d_2. Vieme, že pre šikmý vrh na rovine bez odporu sa najviac oplatí hádzať pod uhlom 45 stupňov, teda Dano dohodí ďalej o

$$\Delta d = d_1 - d_2 = \frac{v^2}{g}\left(\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2\right) \doteq 1{,}38\,\mathrm{m}\,.$$

V praxi by však pravdepodobne kvôli odporu vzduchu doletela ďalej Mišova loptička, záležalo by však na konkrétnych vlastnostiach okolitého vzduchu.

Daniela Pittnerová
`daniela@fykos.cz`

Úloha FoL.21 ... stín

4 body

V jaké nejmenší zeměpisné šířce se můžete nacházet, abyste nikdy nepřerostli váš sluneční stín? Tzn. když budete stát na vodorovné rovině, tak váš stín od Slunce nikdy nebude kratší než vy. *Matěj se skrývá ve stínech ostatních.*

V průběhu dne je stín nejkratší právě v pravé poledne. Nejprve prozkoumáme případ rovnodennosti. Poté přidáme sklon rotační osy Země. Označíme-li naši zeměpisnou šířku φ, bude sklon slunečních paprsků v pravé poledne vzhledem ke kolmici na zemský povrch také φ. Z toho lze lehkou trigonometrií dopočítat délku stínu s

$$s = h \operatorname{tg} \varphi\,,$$

kde h je naše výška. Nás však zajímá pouze kritický případ, kdy $s = h$. V tom případě platí

$$\operatorname{tg} \varphi = 1\,,$$
$$\varphi = 45^\circ\,.$$

Teď přidáme sklon zemské osy $\Phi = 23{,}4^\circ$. V nejhorším případě (během slunovratu) bude Země natočená tak, že sklon paprsků bude $\varphi - \Phi$ (pro kladnou zeměpisnou šířku φ). Tedy

$$\varphi - \Phi = 45^\circ\,,$$
$$\varphi = 45^\circ + 23{,}4^\circ = 68{,}4^\circ\,.$$

Budeme-li se vyskytovat ve větší zeměpisné šířce, nemůže se nám nikdy stát, že by náš stín byl kratší než naše výška. To znamená, že například v Česku i na Slovensku můžeme být delší než náš stín.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha FoL.22 ... zrychlení výtahu

4 body

Výtah ve výškovém domě má jezdit z přízemí do výšky $60\,\mathrm{m}$ *tak, aby velikost zrychlení výtahu při rozjíždění nepřekročila hodnotu* $4\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ *a zároveň aby při zastavování nepřekročila hodnotu* $6\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. *Za jaký nejkratší čas může výtah vyjet nahoru?*

Má optimalizace jízdy výtahem na kolejích 17. listopadu nějaké hranice?

Nejrychleji se výtah dostane nahoru, když se napřed bude v časovém úseku t_1 rozjíždět s maximálním zrychlením a potom začne okamžitě brzdit. K brzdění bude potřebovat čas t_2. Na začátku i na konci musí být v klidu, takže bude platit

$$v = a_1 t_1 = a_2 t_2\,.$$

Z rovnice dostaneme vztah mezi časy

$$t_2 = \frac{a_1}{a_2} t_1 \, .$$

Pro výšku platí známá rovnice

$$h = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = \frac{a_1(a_1 + a_2)}{2a_2} t_1^2 \, .$$

Odtud si můžeme vyjádřit

$$t_1 = \sqrt{\frac{2ha_2}{a_1(a_1 + a_2)}}$$

a obdobně „symetricky“

$$t_2 = \sqrt{\frac{2ha_1}{a_2(a_1 + a_2)}} \, .$$

Hledaný celkový čas je součet těchto časů

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h(a_1 + a_2)}{a_1 a_2}} \doteq 7{,}07\,\mathrm{s} \, .$$

Hledaný čas je $7{,}07\,\mathrm{s}$.

Josef Jírů
jiru@gyoa.cz

Úloha FoL.23 ... krychle Kevin 5 bodů

Velká homogenní krychle se stranou o délce $a = 15\,\mathrm{m}$ se na rovině rozhodne převalit přes jednu ze svých stran tak, aby při tom využila co nejmenší množství energie. Naneštěstí se přímo ve vzdálenosti a od této hrany nachází rajče, které bude brzy rozmáčknuto. Jakou rychlostí na něj dopadne hrana krychle? Tíhové zrychlení je $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Matěj je fascinován valením koule.

Na své trajektorii v průběhu převalování se těžiště nachází nejvýše ve výšce $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. Po jeho dosažení se krychle samovolně překlopí a sníží tím tak svoji potenciální energii o

$$\Delta E = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} - 1\right) amg \, ,$$

kde m je Kevinova hmotnost. Jeho moment setrvačnosti vzhledem k hraně, okolo které se otáčí, je s využitím Steinerovy věty

$$J = \frac{1}{6} ma^2 + \frac{1}{2} ma^2 = \frac{2}{3} ma^2 \, .$$

Ze vztahu pro kinetickou energii $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} J\omega^2$ snadno získáme rychlost dopadu

$$v = a\omega = a\sqrt{\frac{2\Delta E}{J}} = a\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2} - 1\right) amg}{\frac{2}{3} ma^2}} = \sqrt{\frac{3(\sqrt{2} - 1)}{2} ag} \doteq 9{,}562\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \, .$$

Hrana dopadne na rajče rychlostí $9{,}56\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha FoL.24 ... zřetězená
5 bodů

Řetěz o hmotnosti 6,0 kg *a délce* 11 m *je jedním koncem zavěšný ve výšce* 15 m *nad zemí. Určete maximální kinetickou energii řetězu po uvolnění. Uvažujte, že řetěz dopadá na zem dokonale nepružně.* *Josef Jírů chtěl obohatit účastníky o úlohu s řetězem.*

Označme m hmotnost řetězu, l jeho délku, h výšku zavěšení jeho horního konce nad zemí a x vzdálenost právě dopadajícího článku řetězu od jeho horního konce. Pokud je celý řetěz v pohybu, jeho kinetická energie roste, v okamžiku dotyku řetězu se zemí je $E_\mathrm{k} = mg(h-l) = 235\,\mathrm{J}$. Poté je kinetická energie řetězu pro $x \in \langle 0, l\rangle$ dána vztahem

$$E_\mathrm{k}(x) = \frac{1}{2}\frac{x}{l}m2g(h-x) = \frac{mg}{l}\left(-x^2+hx\right)\,.$$

Výraz v závorce je kvadratická funkce s nulovými body 0 a h, maximum má v bodě $x = h/2$. Proto maximální energie je

$$E_\mathrm{kmax} = E_\mathrm{k}(h) = \frac{mgh^2}{4l} \doteq 301\,\mathrm{J}\,,$$

což je skutečně vyšší hodnota než 235 J.

Josef Jírů
jiru@gyoa.cz

Úloha FoL.25 ... korková
4 body

Vítek zkoumal vlastnosti kapalin na vodní ploše s povrchovým napětím $\sigma_1 = 70\,\mathrm{mN{\cdot}m^{-1}}$*. K těmto účelům si vyrobil velmi tenkou korkovou destičku se stranami délky* $b = 5\,\mathrm{cm}$ *a* $c = 7\,\mathrm{cm}$*, který k jeho údivu ploval na hladině. Rozhodl se, že ho vyšle na cestu, proto kápl trochu saponátu hned k okraji jedné z jeho kratších stran. Povrchové napětí mýdlového roztoku je* $\sigma_2 = 40\,\mathrm{mN{\cdot}m^{-1}}$*. Při řešení zanedbejte odpor při pohybu a pomozte Vítkovi určit zrychlení, se kterým se obdélníček rozjede vzhůru ke svým dobrodružstvím, je-li jeho hmotnost* $m = 100\,\mathrm{g}$*. Pro jednoduchost uvažujte kolmé smáčení.* *Vítek rád urychluje korek saponátem.*

Saponát kápneme ke kratší straně. Ze zadání okamžitě vidíme, že má délku b. Protože jsme kápli saponát do vody, vznikl mýdlový roztok, který má jiné povrchové napětí. Tím vyvedeme obdélník z rovnováhy, ve které dosud spočíval (v rovině hladiny vody). Síly působící na stranu c se vyruší. Na stranu, ke které jsme kápli saponát, působí síla $F_2 = \sigma_2 b$, zatímco na protilehlou, okolo které je pouze voda bez saponátu, působí síla $F_1 = \sigma_1 b$. Tím nám vzniká výslednice

$$F_1 - F_2 = b(\sigma_1 - \sigma_2) = ma \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{b(\sigma_1-\sigma_2)}{m}\,.$$

Po dosazení číselných hodnot získáme pro zrychlení $a = 1{,}5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Vít Beran
vit.beran@fykos.cz

Úloha FoL.26 ... olivová první 6 bodů

Dokonalou olivu bez pecky si můžeme představit jako dutou kouli s vnitřním poloměrem $r_1 = 3{,}00\,\mathrm{mm}$ *a vnějším poloměrem* $r_2 = 10{,}0\,\mathrm{mm}$. *Jak hluboko se dokonalá oliva ponoří do slaného nálevu o hustotě* $\varrho_\mathrm{n} = 1\,211\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, *jestliže má hustotu* $\varrho_\mathrm{o} = 816\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$? *Uvažujte, že dokonalá oliva je dokonale chutná a že nálev prosákne i do vnitřní dutiny.*

Jáchym má úchylku na olivy.

Označme objem části olivy do vzdálenosti x od jejího spodního okraje jako $V(x)$. Zřejmě pak objem celé olivy je

$$V(2r_2) = \frac{4}{3}\pi\left(r_2^3 - r_1^3\right) .$$

Z Archimédova zákona víme, že pro objem části olivy ponořené do hloubky h pod hladinu platí

$$V(h) = \frac{\varrho_\mathrm{o}}{\varrho_\mathrm{n}} V(2r_2) .$$

Je výhodné rozdělit si $V(x)$ na tři různé funkce na třech různých intervalech. Můžeme tedy psát pro $x \in \langle 0, r_2 - r_1\rangle$

$$V(x) = \int_0^x S(y)\mathrm{d}y ,$$

kde plochu průřezu koule ve výšce y spočítáme jako

$$S(y) = \pi r^2(y) = \pi\left(r_2^2 - (r_2 - y)^2\right) = \pi\left(2r_2 y - y^2\right) .$$

Dosazením zpět do integrálu dostáváme vztah z tabulek pro objem kulové úseče

$$V(x) = \pi\int_0^x \left(2r_2 y - y^2\right)\mathrm{d}y = \pi\left[r_2 y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_0^x = \pi\left(r_2 x^2 - \frac{x^3}{3}\right) .$$

Dosazením samozřejmě zjistíme, že $V(x) < V(h)$ pro všechna $x \in \langle 0, r_2 - r_1\rangle$; to také můžeme vidět z toho, že $V(r_2) = V(2r_2)/2$, ale $\varrho_\mathrm{o} > \varrho_\mathrm{n}/2$. Ze symetrie situace bychom mohli již snadno spočítat $V(x)$ pro $x \in \langle r_2 + r_1, 2r_2\rangle$, ale dosazením bychom dostali, že všechny objemy jsou příliš velké. Chceme tak najít funkční předpis pro $V(x)$ pro hodnoty x mezi předchozími dvěma intervaly. To ale opět není nic složitého, jednoduše od objemu pro x z prvního intervalu odečteme objem části prázdné vnitřní koule, tedy máme rozdíl objemů dvou kulových úsečí

$$\begin{aligned} V(x) &= \pi\left(r_2 x^2 - \frac{x^3}{3}\right) - \pi\left(r_1\left(x - r_2 + r_1\right)^2 - \frac{\left(x - r_2 + r_1\right)^3}{3}\right) \\ &= \pi x\left(r_2^2 - r_1^2\right) - \pi\left(r_2 - r_1\right)^2\frac{r_2 + 2r_1}{3} . \end{aligned}$$

Z této rovnice už dokážeme vyjádřit

$$h = \frac{3V(h) + \pi\left(r_2 + 2r_1\right)\left(r_2 - r_1\right)^2}{3\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)} = \frac{4\frac{\varrho_\mathrm{o}}{\varrho_\mathrm{n}}\left(r_2^3 - r_1^3\right) + \left(r_2 + 2r_1\right)\left(r_2 - r_1\right)^2}{3\left(r_2^2 - r_1^2\right)} \doteq 12{,}5\,\mathrm{mm} .$$

Dokonalá oliva se ponoří do hloubky $h \doteq 12{,}5\,\mathrm{mm}$ pod hladinu.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FoL.27 ... Paťo sportuje 5 bodů

Známá legenda praví, že Paťo na Albeři zaběhl dvanáctiminutový běh za šest minut. Kolem trati jsou umístěny patníky, které jsou od sebe vzdáleny $\Delta l = 5{,}000\,000\,000\,\mathrm{km}$, přičemž první patník je ve vzdálenosti Δl od startu. Spočítejte, kolik patníků Paťo minul, pokud mu jeho hodinky na konci závodu ukazovaly, že běžel jen zmíněných šest minut. Rychlost světla je $299\,792\,458\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. *Lukáš se radši večer podívá pod postel, jestli tam není Paťo.*

Odchylka hodinek Paťa a rozhodčího je způsobena dilatací času. Pokud označíme Paťův vlastní čas $\Delta\tau = 6\,\mathrm{min}$ a čas rozhodčího $\Delta t = 12\,\mathrm{min}$, můžeme vztah pro dilataci času zapsat jako

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\,.$$

Odtud zjistíme, že Paťo musel běžet rychlostí

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{\Delta\tau}{\Delta t}\right)^2}\,,$$

uběhl tedy (z hlediska soustavy spojené se zemí)

$$l = v\Delta t = c\Delta t\sqrt{1-\left(\frac{\Delta\tau}{\Delta t}\right)^2} \doteq 186\,932\,077\,\mathrm{km}\,.$$

Paťo tedy minul 37 386 415 patníků (poměr $\Delta l/l$ jsme zaokrouhlili dolů na celá čísla).

Lukáš Timko
`lukast@fykos.cz`

Úloha FoL.28 ... energetické kyvadlo 5 bodů

Matematické kyvadlo tvoří malá kulička o hmotnosti $m = 5\,\mathrm{g}$ zavěšená na lanku délky $l = 2\,\mathrm{m}$. Kuličku vychýlíme z rovnovážné polohy o úhel $\alpha = 4^\circ 10'$ a necháme kmitat. Po dokončení jednoho kyvu má kulička 99 % své původní energie. Po kolika celých kyvech bude mít kulička při přechodu rovnovážnou polohou rychlost menší než $v_h = 0{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$? Uvažujte, že kyvadlo ztrácí energii symetricky vzhledem k rovnovážné poloze.

Danka pozorovala „přestavbu“ menzy v Troji.

Položme nulovú hladinu potenciálnej energie do výšky rovnovážnej polohy guľôčky. Pri vychýlení o uhol α získa počiatočnú potenciálnu energiu

$$E_{p_0} = mgh_0\,,$$

pričom pre h_0 z geometrie situácie platí

$$h_0 = l\left(1-\cos\alpha\right)\,.$$

Počas kmitania sa potenciálna energia mení na kinetickú a zas späť, pričom sa časť energie spotrebúva (vo forme trenia). Označme $\eta = 0{,}99$. Po jednom kyve je potenciálna energia guľôčky rovná

$$E_{p_1} = \eta E_{p_0}\,.$$

Označme n počet kyvov, po ktorých je splnená podmienka zo zadania. Potom po n kyvoch je potenciálna energie guľôčky v krajnej polohe rovná

$$E_{p_n} = \eta^n E_{p0} \,.$$

Počas prvého prechodu rovnovážnou polohou má gulička nulovú potenciálnu energiu a jej kinetická energia je

$$E_{k_1} = \frac{1}{2} m v_1^2 \,,$$

pričom platí

$$E_{k_1} > E_{p_1} \,.$$

Pri n prechode rovnovážnou polohou teda platí

$$\begin{aligned} E_{k_n} &> E_{p_n} \,, \\ \frac{1}{2} m v_h^2 &> \eta^n m g h_0 \,, \\ n &> \log_\eta \frac{v_h^2}{2gl\left(1-\cos\alpha\right)} \,, \\ n &> 94{,}8 \,. \end{aligned}$$

Kyvadlo musí teda vykonať 95 celých kyvov.

Daniela Pittnerová
`daniela@fykos.cz`

Úloha FoL.29 ... Einstein s Čerenkovem 6 bodů

Jakou maximální vlnovou délku v prostředí s indexem lomu $n = 1{,}804\,17$ bude mít foton, který dopadne na povrch zlata v tomto prostředí a vyrazí jeden elektron, který bude tak rychlý, že se v daném prostředí bude pohybovat rychleji než světlo? Výstupní práce elektronu ve zlatě je $W_0 = 5{,}45000\,\mathrm{eV}$. Rychlost světla ve vakuu je $c = 2{,}997\,925 \cdot 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, Planckova konstanta $h = 6{,}626\,07 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}s}$, klidová hmotnost elektronu $m_0 = 9{,}109\,38 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ a elementární náboj $e = 1{,}60218 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$. *Karel se díval do reaktoru.*

Foton o frekvenci f a vlnové délce λ v prostředí s indexem lomu n má energii

$$E = hf = \frac{hc}{n\lambda} \,. \tag{1}$$

Výslednou energii elektronu tedy vypočítáme podle rovnice

$$W = E - W_0 \,.$$

Rychlost elektronu má být alespoň

$$v = \frac{c}{n} \,,$$

odkud můžeme spočítat jeho kinetickou energii pomocí relativistického vztahu

$$W = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = m_0 c^2 \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} - 1 \right) .$$

Nyní už z (1) snadno vyjádříme hledanou maximální vlnovou délku

$$\lambda = \frac{hc}{nE} = \frac{hc}{n\left(W_0 + W\right)} = \frac{hc}{n\left(W_0 + m_0c^2\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} - 1\right)\right)} \doteq 6{,}675\,82 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m} = 6{,}675\,82\,\mathrm{pm}\,.$$

Maximální vlnová délka je 6,675 82 pm.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FoL.30 ... dvoustavová 5 bodů

Pták Fykosák se začal učit statistickou fyziku, ale neví si rady s následujícím problémem. Mějme soubor N částic uzavřených v krabici. Tu rozdělme na dvě stejné poloviny, nachází-li se částice v pravé části krabice, označíme její stav jako 0. V opačném případě 1. Nezajímá nás, které konkrétně částice mají 1 a 0, nýbrž jaký počet celkově z nich má daný stav. Platí, že $N_1 + N_0 = N$, jednotlivé stavy budeme popisovat veličinou $m = N_1 - N_0$, která nám popisuje rozdělení N částic mezi 2 stavy. Vaším úkolem bude odvodit vztah pro počet způsobů $t(m)$, jak N částic rozdělit mezi tyto dva stavy, pro dané m (např. pro $N = m = 10$ je $t = 1$). Vězte, že analytický vztah pomocí Stirlingovy aproximace můžeme upravit na

$$t(m) = \sqrt{\frac{2}{\pi N}}2^N \exp\left(-\frac{m^2}{2N}\right)\,.$$

Oba vztahy vyčíslete pro $N = 20$ a $m = 8$ a zjistěte, o kolik procent (vzhledem k analytické hodnotě) se liší hodnota získáná aproximací od té analytické. *Vítek se cítí být v jiném stavu.*

Pro řešení si musíme uvědomit, že otázka se vlastně ptá na binomické rozdělení – odpovídá tedy úloze typu „pro 5 hodů mincí padne právě dvakrát orel“. Naším úkolem je tedy najít vlastně binomický koeficient pro celkový počet možných stavů N a pro jev N_1 (můžeme zvolit i N_0, pravděpodobnosti 1 i 0 jsou stejné, tedy 1/2). Pro binomický koeficient máme

$$t = \binom{N}{N_1} = \frac{N!}{(N - N_1)!N_1!}\,,$$

což je hledaný počet způsobů, jak z N částic vybrat N_1. Výraz $N - N_1$ ale není nic jiného než N_0. Dosadíme-li za výrazy pro $N_0 = (N - m)/2$ a $N_1 = (N + m)/2$, získáme

$$t = \frac{N!}{\left(\frac{N-m}{2}\right)!\left(\frac{N+m}{2}\right)!}\,.$$

Nyní již jen do vztahu dosadíme číselné hodnoty a dosadíme číselné hodnoty i do vztahu aproximačního. Výsledek, tedy nepřesnost aproximace v procentech, je dána jako

$$q = 1 - \frac{37\,771}{38\,760}\,,$$

což je 2,55 %.

Vít Beran
`vit.beran@fykos.cz`

Úloha FoL.31 ... vesmírná 5 bodů

Hvězdě, která se vzdaluje od Země rychlostí $v = 1{,}70 \cdot 10^7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$*, bylo v laboratoři na Zemi změřeno spektrum intenzity záření. Maximum v tomto spektru se nachází na vlnové délce* $\lambda_0 = 700\,\mathrm{nm}$*. Určete, jaká je teplota hvězdy. Hvězdu považujte za dokonale černé těleso. Rychlost světla je* $c = 3{,}00 \cdot 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$*.* *Vítek se začetl do Fundamental Astronomy.*

Víme-li, že se hvězda vzdaluje, uplatní se Dopplerovský rudý posuv. Mezi emitovanou a observovanou vlnovou délkou platí vztah $\lambda_0 = \lambda_\mathrm{e}(1 + z)$, kde z je faktor rudého posuvu. Podle Wienova posunovacího zákona vyzařuje těleso o teplotě T s největší intenzitou na vlnové délce λ_m (v soustavě spojené se hvězdou) a platí vztah

$$\lambda_\mathrm{m} = \frac{b}{T}\,,$$

kde $b = 2{,}898\,\mathrm{mm{\cdot}K}$ je Wienova konstanta a λ_m můžeme ztotožnit s λ_e.

Pro rudý posuv platí následující vztah

$$z = \left(\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\,,$$

kde c je rychlost světla. Zkombinujeme-li všechny vztahy, dostaneme pro teplotu rovnici

$$T = \frac{b}{\lambda_0}\left(\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}\right)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Pro zadané hodnoty získáme $T \doteq 4\,380\,\mathrm{K}$.

Vít Beran
vit.beran@fykos.cz

Úloha FoL.32 ... třetinový vlak 3 body

Vlak jel rychlostí $96\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$*. V jaké vzdálenosti před stanicí začal brzdit, jestliže během první třetiny této vzdálenosti vlak rovnoměrně zpomaleným pohybem zmenšil svoji rychlost na polovinu, druhou třetinu této vzdálenosti projel rovnoměrným pohybem a zbývající třetinu této vzdálenosti projel rovnoměrně zpomaleným pohybem do zastavení? Vlak začal poprvé brzdit* $99\,\mathrm{s}$ *před zastavením.* *Josef Jírů chtěl obohatit účastníky o úlohu s vláčky.*

Označme v_0 počáteční rychlost vlaku a s_1 dráhu každého ze tří úseků. Doby jízdy na jednotlivých úsecích jsou v postupném poměru

$$t_1 : t_2 : t_3 = \frac{s_1}{\frac{3}{4}v_0} : \frac{s_1}{\frac{1}{2}v_0} : \frac{s_1}{\frac{1}{4}v_0}\,,$$

kde jmenovatele na pravé straně rovnosti představují průměrnou rychlost vlaku v dané třetině (vycházíme ze vztahu $v_\text{prům} = s_1/t_{1,2,3}$). Dále můžeme pravou stranu upravit do podoby

$$\frac{s_1}{\frac{3}{4}v_0} : \frac{s_1}{\frac{1}{2}v_0} : \frac{s_1}{\frac{1}{4}v_0} = \frac{4}{3} : 2 : 4 = 2 : 3 : 6\,.$$

Např. druhý úsek tedy vlak projel za čas $t_2 = 3/11 \cdot 99\,\mathrm{s} = 27\,\mathrm{s}$, čímž ujel dráhu $s_1 = v_0 t_2/2 = 360\,\mathrm{m}$. Ujetá vzdálenost je trojnásobná, tedy $1\,080\,\mathrm{m}$.

Josef Jírů
jiru@gyoa.cz

Úloha FoL.33 ... korálek na spirálce 5 bodů

Máme spirálu v prostoru definovanou parametricky rovnicemi $x = \sin\varphi$, $y = -\cos\varphi$, $z = \varphi/2\pi$. Ta je umístěna v homogenním tíhovém poli o intenzitě $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ orientované v záporném směru osy z. Na spirálu umístíme korálek, který se po ní bude pohybovat bez tření a nebude rotovat. S jakým zrychlením bude klesat vzhledem k ose z? *Karel si rád hraje s korálky.*

V rovině xy vypadá celá spirála jako jednotková kružnice. Nás zajímá pouze zrychlení ve směru osy z. Protože síla působící stáčení kuličky je kolmá ke směru pohybu, a tedy koná nulovou práci, můžeme si celou spirálu rozbalit do přímky. Tím celý problém převedeme na úlohu s nakloněnou rovinou. Označme odklon této nakloněné roviny (rozbalené spirálky) od vodorovné roviny α. Každým obejitím jednotkové kružnice korálek klesne o výšku 1, tedy dostáváme

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2\pi}\,,$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2\pi} \doteq 0{,}16\,.$$

Složka tíhového zrychlení, která na korálek působí ve směru pohybu, bude $g\sin\alpha$. Nás však zajímá, jak korálek zrychluje vzhledem k ose z, tedy musíme předchozí výsledek ještě jednou vynásobit $\sin\alpha$. Máme tak

$$a = g\sin^2\alpha = g\sin^2\operatorname{arctg}\frac{1}{2\pi} = \frac{g}{1+(2\pi)^2}\,,$$

což je číselně asi $0{,}242\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FoL.34 ... olivová druhá 6 bodů

Perfektní oliva má tvar dokonalé koule, v jejímž středu je umístěna pecka ve tvaru koule o poloměru $r_1 = 3\,\mathrm{mm}$. Perfektní olivy mají stejnou celkovou hustotu jako slaný nálev $\varrho_\mathrm{n} = 1\,211\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, čili se v plechovce volně vznáší. Pokud z jedné z oliv pecku odstraníme a necháme ji mimo nádobu, zbytek olivy se vznese a začne plovat na hladině, přičemž hladina v plechovce ve tvaru válce s poloměrem $R = 31\,\mathrm{mm}$ poklesne o $\Delta h = 4\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}$. Jaká je hustota pecky? Uvažujte, že voda prosákne i do vnitřní díry po pecce.

Jáchyma ta posedlost olivami prostě nepřejde.

Poloměr olivy označme r_2. Celková hustota perfektní olivy je ϱ_n. Pokud tedy hustotu pecky označíme ϱ_p a hustotu zbytku olivy označíme ϱ_o, dostaneme rovnici

$$\frac{4}{3}\pi\left(r_2^3 - r_1^3\right)\varrho_\mathrm{o} + \frac{4}{3}\pi r_1^3\varrho_\mathrm{p} = \frac{4}{3}\pi r_2^3\varrho_\mathrm{n}\,,$$

odkud si můžeme vyjádřit

$$\varrho_\mathrm{p} = \frac{r_2^3\varrho_\mathrm{n} - \left(r_2^3 - r_1^3\right)\varrho_\mathrm{o}}{r_1^3}\,.$$

Jakmile bude zbytek olivy plovat, objem částí nad a pod hladinou označme po řadě V_1 a V_2, potom platí

$$V_1 + V_2 = \frac{4}{3}\pi\left(r_2^3 - r_1^3\right) ,$$
$$V_2\varrho_\mathrm{n} = \left(V_1 + V_2\right)\varrho_\mathrm{o} ,$$

odkud si můžeme vyjádřit

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi\left(r_2^3 - r_1^3\right)\left(1 - \frac{\varrho_\mathrm{o}}{\varrho_\mathrm{n}}\right) .$$

Celkový objem pod hladinou tak klesl o objem pecky a zároveň o objem V_1. Tento objem se nutně musí rovnat objemu, o který poklesla hladina. Ten si můžeme vyjádřit jako $\pi R^2 \Delta h$. Z uvedené rovnosti plyne

$$\pi R^2\Delta h = V_1 + \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{4}{3}\pi\left(r_2^3 - r_1^3\right)\left(1 - \frac{\varrho_\mathrm{o}}{\varrho_\mathrm{n}}\right) + \frac{4}{3}\pi r_1^3 ,$$

ze které vyjádříme

$$\varrho_\mathrm{o} = \left(1 - \frac{3R^2\Delta h - 4r_1^3}{4\left(r_2^3 - r_1^3\right)}\right)\varrho_\mathrm{n} .$$

Dosazením do již dříve odvozené rovnice dostáváme výsledek

$$\varrho_\mathrm{p} = \frac{3R^2\Delta h}{4r_1^3}\varrho_\mathrm{n} \doteq 1\,293\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}} .$$

Hustota pecky perfektní olivy je $\varrho_\mathrm{p} \doteq 1\,293\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FoL.35 ... Danova vejce 7 bodů

Dan potřebuje hodit z balkónu Dance syrové vejce tak, aby je zachytila při minimální rychlosti, protože tím se sníží na minimum pravděpodobnost jeho rozbití při záchytu. Místo hodu se nachází ve svislé výšce h. Vzhledem k nepříznivému terénu se Danka nemůže přiblížit více než do minimální vodorovné vzdálenosti $3h$ od balkónu. Určete elevační úhel, pod nímž musí Dan vejce hodit. Odpor vzduchu neuvažujte. *Holky rády chytají vajíčka.*

Při volbě počátku v patě kolmice a při orientaci osy y svisle vzhůru místo záchytu splňuje rovnice

$$3h = v_0 t\cos\alpha ,$$
$$0 = h + v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 .$$

Vyloučením času dostaneme

$$0 = h + 3h\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{9gh^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} .$$

Z rovnice plyne

$$v_0^2 = \frac{9gh}{2\cos^2\alpha\,(1+3\,\mathrm{tg}\,\alpha)} = \frac{9gh}{2\cos^2\alpha + 3\sin 2\alpha}\,.$$

Díky zákonu zachování energie stačí najít takový úhel, pro který je v_0 minimální. Pak bude i rychlost dopadu minimální. Hledáme tedy takový úhel, pro který je jmenovatel maximální. Derivace jmenovatele je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(2\cos^2\alpha + 3\sin 2\alpha\right) = -2\sin 2\alpha + 6\cos 2\alpha\,.$$

Z podmínky nulové derivace plyne $\mathrm{tg}\,2\alpha = 3$. Odtud dostaneme $\alpha_1 \doteq 35{,}8^\circ$, $\alpha_2 \doteq -54{,}2^\circ$, protože hledáme řešení pouze na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$. Druhé řešení ale po dosazení dává záporný kvadrát rychlosti, což znamená, že by vejce k Dance ani nedolétlo.

Josef Jírů
jiru@gyoa.cz

Úloha FoL.36 ... motivační kondenzátor 6 bodů

Vítek má svůj oblíbený kondenzátor. Na jeho desky vzdálené od sebe $d = 2{,}0\,\mathrm{mm}$ přivedl náboj $Q = 1{,}0\,\mathrm{nC}$. Následně se rozhodl, že mezi desky přidá dielektrický materiál. Následkem toho již není elektrická intenzita mezi deskami konstantní, nýbrž se dá popsat pomocí rovnice

$$E(x) = -\frac{Q\mathrm{e}^{x/d}}{\varepsilon_0 \kappa_0 S}\,,$$

kde $\kappa_0 = 1{,}5$ a plocha desky kondenzátoru je $S = 20{,}0\,\mathrm{cm}^2$. Určete kapacitu tohoto kondenzátoru.
Vítek na praktiku rozbil kondenzátor.

Jedná se o jednodimenzionální problém, a proto můžeme pro elektrickou intenzitu psát $E(x) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$. Kapacitu kondenzátoru C určíme ze vztahu $C = Q/\Delta\varphi$, kde $\Delta\varphi$ je rozdíl potenciálů mezi deskami a Q je náboj přivedený na desky. V zadání máme explicitně zadanou funkci $E(x)$, kterou stačí přeintegrovat

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{Q}{\varepsilon_0\kappa_0 S}\mathrm{e}^{x/d}\,\mathrm{d}x\,.$$

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{d}\varphi = \frac{Q}{\varepsilon_0\kappa_0 S}\int_0^d \mathrm{e}^{\frac{x}{d}}\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\Delta\varphi = \frac{Qd}{\varepsilon_0\kappa_0 S}\left(\mathrm{e}-1\right)\,.$$

Dosazením do vzorce pro kapacitu obdržíme

$$C = \frac{\varepsilon_0\kappa_0 S}{d\,(\mathrm{e}-1)} \doteq 7{,}7\,\mathrm{pF}\,.$$

Jak můžeme vidět, výsledek nezávisí na přivedeném náboji. To splňuje naše očekávání, protože kapacita je vlastnost součástky.

Vít Beran
vit.beran@fykos.cz

Úloha FoL.37 ... klidné místečko

5 bodů

V rozlehlé pusté krajině vedou dvě paralelní silnice. Obě jsou velmi dlouhé, rovné a vzájemně rovnoběžné. Jejich vzdálenost je $s = 490{,}0\,\mathrm{m}$. Matěj se ocitl uprostřed mezi těmito silnicemi. Přes první silnici se však nemůže dostat, protože je tak frekventovaná, že zde jezdí $n_1 = 0{,}90$ aut za sekundu. Druhá silnice je však ještě frekventovanější, tam jezdí $n_2 = 1{,}60$ aut za sekundu. Po obou silnicích jezdí auta stejnou rychlostí. Nezbylo mu tedy nic jiného než čekat na smrt, protože žádný přechod není v dohledu. Našel si tedy místečko, kde je nejmenší hluk ze silnic, sedl si a čekal... Jak daleko od první (té klidnější) silnice Matěj sedí? V prostoru nejsou žádné zvukové bariéry, zvuk se vzduchem šíří rovnoměrně a beze ztrát a každé auto je stejně hlučné.

Matěje napadla, když se chtěl zabít poté, co dostal dvojku ze zkoušky.

Jak závisí hluk od jedné rovné silnice na vzdálenosti? V prostoru se hluk od bodového zdroje šíří do všech směrů, a tedy závislost jeho intenzity I na vzdálenosti r je $I(r) = K/r^2$, kde K je nějaká konstanta závislá na intenzitě zdroje.[1] Silnici ale bereme jako jednorozměrný zdroj zvuku. Pokud známe Gaussův zákon, můžeme domyslet, že závislost intenzity na vzdálenosti od silnice bude vypadat jako $I(r) = k'/r$, kde k' je jiná konstanta. V opačném případě si to můžeme odvodit integrováním (silnici bereme jako hodně bodových zdrojů vedle sebe)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{y^2 + r^2}\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{r}\frac{1}{\left(\frac{y}{r}\right)^2 + 1}\frac{\mathrm{d}y}{r} = \frac{k}{r}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{k}{r}[\operatorname{arctg} t]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi k}{r}\,,$$

kde jsme použili substituci $y/r = t$. k je konstanta závislá na délkové hustotě intenzity zdroje.

Pro nás je důležitou vlastností intenzity zvuku její aditivita. Tedy celkovou intenzitu lze spočítat sečtením všech intenzit jednotlivých zdrojů, čehož jsme využili právě při integrování výše. Snadno tedy nahlédneme, že konstanta k, resp. k' bude přímo úměrná frekvenci aut na dané silnici $k' = \pi k = \mathcal{K}n$.

Vzdálenost, ve které se Matěj usídlil, označíme x. Závislost intenzity hluku na vzdálenosti x od první silnice získáme sečtením intenzit od obou silnic (vzdálenost od té druhé je $s - x$).

$$I_{\mathrm{clk}}(x) = \frac{\mathcal{K}n_1}{x} + \frac{\mathcal{K}n_2}{s-x}\,.$$

Nyní nám stačí najít minimum této funkce, což lze snadno dopočítat pomocí první derivace.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{clk}}(x)}{\mathrm{d}x} &= 0\\
-\frac{\mathcal{K}n_1}{x^2} + \frac{\mathcal{K}n_2}{(s-x)^2} &= 0\\
n_1(s-x)^2 &= n_2x^2\\
\left(\frac{s}{x} - 1\right)^2 &= \frac{n_2}{n_1}\\
\frac{s}{x} &= 1 + \sqrt{\frac{n_2}{n_1}}\\
x &= s\frac{n_1\sqrt{n_1n_2}}{n_1 - n_2}
\end{aligned}$$

[1] V řešení vystupuje mnoho konstant, jejichž hodnota pro nás není vůbec důležitá. Pro rozlišení je budeme značit různými typy písmene K.

kde jsme využili $s/x > 1$.Po dosazení dostáváme

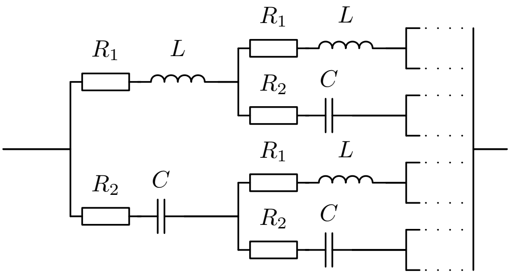
$$x = \frac{3}{7}s = 210\,\mathrm{m}\,.$$

Druhé řešení, které má opačné znaménko po odmocnění, fyzikální význam nemá, protože naši funkci $I_{\mathrm{clk}}(x)$ jsme si definovali pouze na intervalu mezi silnicemi. Jinak bychom museli použít absolutní hodnotu pro vzdálenost x, resp. $s - x$.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha FoL.38 ... konečně komplexní nekonečný obvod 5 bodů

Mějme nekonečný RLC obvod (viz obrázek). Indukčnosti cívek jsou $L = 3\,\mathrm{mH}$, kapacity kondenzátorů jsou $C = 4\,700\,\mathrm{nF}$ a pro odpory platí $R_1 = 1{,}5\,\mathrm{k\Omega}$ a $R_2 = 0{,}3\,\mathrm{k\Omega}$. Při jaké frekvenci střídavého napětí bude obvod vykazovat pouze reálnou impedanci? Fázový posun v důsledku konečné rychlosti šíření elektromagnetického pole neuvažujte. *Jáchym je rád komplexní.*



Pokud si impedance jednotlivých součástek označíme

$$Z_L = \mathrm{i}\omega L\,,$$
$$Z_C = \frac{1}{\mathrm{i}\omega C}\,,$$
$$Z_{R_1} = R_1\,,$$
$$Z_{R_2} = R_2\,,$$

pro celkovou impedanci obvodu platí

$$Z = \frac{(Z_L + Z_{R_1} + Z)\,(Z_C + Z_{R_2} + Z)}{Z_L + Z_{R_1} + Z + Z_C + Z_{R_2} + Z}\,.$$

Roznásobením dostáváme

$$Z^2 = Z_L Z_C + Z_L Z_{R_2} + Z_C Z_{R_1} + Z_{R_1} Z_{R_2} = \frac{L}{C} + R_1 R_2 + \mathrm{i}\left(\omega L R_2 - \frac{R_1}{\omega C}\right)\,.$$

Aby bylo Z reálné, musí být Z^2 kladné reálné, tedy

$$\omega L R_2 - \frac{R_1}{\omega C} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{R_1}{R_2 L C}}\,.$$

Frekvenci už z úhlové frekvence spočítáme snadno jako

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{R_1}{R_2 LC}} \doteq 3{,}00\,\mathrm{kHz}\,.$$

Impedance bude reálná pro frekvenci $f \doteq 3{,}00\,\mathrm{kHz}$.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FoL.39 ... vertikální polička — 4 body

Mějme měděný kvádr se stranou o délce $l_0 = 1\,970{,}0\,\mathrm{mm}$ a o hmotnosti $m = 79{,}00\,\mathrm{kg}$. Pokud teplotu mědi snížíme o $\Delta T = 12\,\mathrm{K}$, kvádr přesně zapadne mezi dva dokonale tuhé bloky. Počkáme, až se teplota mědi opět vrátí k původní hodnotě. Jak velkou hmotností nyní můžeme kvádr zatížit, aniž by spadl? Koeficient tření mezi mědí a bloky je $f = 0{,}15$. Předpokládejte, že kvádr se při zatížení nedeformuje. *Jáchym vymyslel nový způsob skladování věcí.*

Pokud koeficient délkové teplotní roztažnosti mědi označíme α, pak pro vzdálenost mezi bloky l platí

$$l = l_0\left(1 - \alpha\Delta T\right)\,.$$

Dále označme modul pružnosti v tahu a tlaku mědi E, potom kvádr působí na obě strany silou

$$F = SE\frac{l_0 - l}{l_0} = SE\alpha\Delta T\,,$$

kde plochu průřezu kvádru S spočítáme z hustoty mědi ϱ jako

$$S = \frac{m}{\varrho l_0}\,.$$

To způsobuje třecí sílu o velikosti $F_\mathrm{t} = 2fF$. Pro hmotnost M, kterou můžeme kvádr zatížit aniž by spadl, platí

$$M = \frac{F_\mathrm{t}}{g} - m = m\left(\frac{2fE\alpha\Delta T}{\varrho l_0 g} - 1\right) \doteq 3\,300\,\mathrm{kg}\,,$$

kde jsme dosadili hodnoty $\alpha = 1{,}7\cdot 10^{-5}\,\mathrm{K^{-1}}$, $E = 120\,\mathrm{GPa}$ a $\varrho = 8\,900\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Kvádr unese ještě dalších $3\,300\,\mathrm{kg}$, aniž by spadl.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FoL.40 ... olivová třetí — 5 bodů

Jáchym jí olivy rychlostí přímo úměrnou druhé mocnině aktuálního množství oliv. Den po otevření plechovky jich bylo 32, další den potom jich zbylo už jen 17. Kolik jich bylo původně v plechovce? Předpokládejte, že Jáchym jí olivy spojitě. *Jáchymovi se zdá jenom o olivách.*

Počet oliv si označíme N. Rychlost jezení oliv pak je

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \lambda N^2\,.$$

Jednoduchou integrací dostáváme

$$-\frac{1}{N} = \lambda t + C\,.$$

Ze zadání víme, že v čase $t_1 = 1\,\mathrm{d}$ zbývalo $N(t_1) = 32$ oliv, zatímco v čase $t_2 = 2\,\mathrm{d}$ zbývalo už jen $N(t_2) = 17$ oliv. Máme tak dvě rovnice o dvou neznámých. Z první si vyjádříme

$$\lambda = -\frac{\frac{1}{N(t_1)} + C}{t_1}\,,$$

dosazením do druhé dostáváme

$$-\frac{1}{N(t_2)} = -\frac{\frac{1}{N(t_1)} + C}{t_1} t_2 + C\,,$$

$$C = \frac{\frac{t_1}{N(t_2)} - \frac{t_2}{N(t_1)}}{t_2 - t_1}\,.$$

Nyní už můžeme psát výsledek

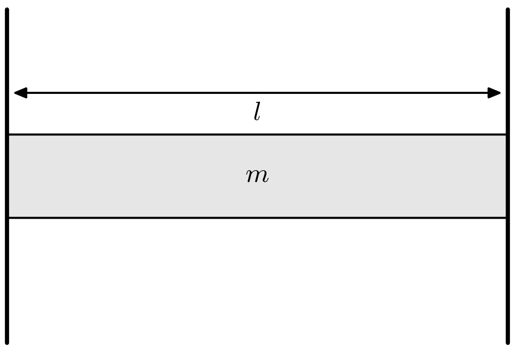
$$N(0) = -\frac{1}{C} = \frac{t_1 + t_2}{\frac{t_2}{N(t_1)} - \frac{t_1}{N(t_2)}} = 272\,.$$

V plechovce původně bylo 272 oliv.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FoL.41 ... pružná smyčka 6 bodů

O kolik se zmenší délka kruhové smyčky o poloměru $R_0 = 0{,}45\,\mathrm{m}$, *jestliže se bude nacházet v homogenním stacionárním magnetickém poli o velikosti* $B = 0{,}83\,\mathrm{T}$ *a bude jí procházet elektrický proud* $I = 16\,\mathrm{A}$*? Smyčka je vyrobena z mosazného drátu kruhového průřezu o poloměru* $r = 0{,}254\,\mathrm{mm}$, *jehož Youngův modul pružnosti v tahu je* $E = 98\,\mathrm{GPa}$. *Osa smyčky je rovnoběžná s vektorem magnetické indukce tak, že magnetické síly smyčku stlačují.*



Vaška zajímalo, co se děje s magnetem v magnetickém poli.

Délka smyčky se změní z l_0 na l, celkově o $\Delta l = l - l_0$. Jestliže má drát obsah příčného průřezu $S = \pi r^2$, bude v něm podle Hookova zákona normálové napětí

$$\sigma = \frac{\Delta l}{l_0} E = -\frac{F}{S}\,,$$

kde F je síla, která z každé strany působí na libovolný element drátu směrem dovnitř daného elementu. Nyní si zvolme velmi malý úsek smyčky o délce $\mathrm{d}x$. Středový úhel k tomuto oblouku bude

$$2\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}x}{R}\,,$$

kde R je výsledný poloměr smyčky, který si můžeme vyjádřit ze vztahu $l = 2\pi R$. Původní délka smyčky byla $l_0 = 2\pi R_0$.

Na tento úsek působí magnetická síla $\mathrm{d}F_\mathrm{m}$ směrem do středu smyčky. Dále na něj z obou stran působí síla F. Element smyčky je v klidu, tudíž výslednice sil, které na něj působí, musí být nulová. Sílu F si můžeme rozložit na dvě složky. Jedna je kolmá na směr síly $\mathrm{d}F_\mathrm{m}$, a proto se vyruší s odpovídající složkou síly F z druhé strany. Druhá je rovnoběžná s $\mathrm{d}F_\mathrm{m}$, ale má opačný směr. Pro její velikost z geometrie situace vyplývá

$$\mathrm{d}F_x = F \sin \mathrm{d}\varphi \approx F \mathrm{d}\varphi\,.$$

Potom zřejmě platí $2\mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F_\mathrm{m}$.

Nyní si ještě vyjádříme velikost magnetické síly. Pokud se částice s nábojem $\mathrm{d}q$ pohybuje rychlostí v v poli s indukcí B, bude na ni působit síla $\mathrm{d}F_m = \mathrm{d}qvB$. Rychlost je definována jako dráha uražená za daný čas a proud je náboj, který prošel průřezem vodiče za daný čas. Odtud plyne

$$\mathrm{d}F_\mathrm{m} = \mathrm{d}qvB = \frac{\mathrm{d}q\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = IB\,\mathrm{d}x\,.$$

Nyní už máme k dispozici vše, co potřebujeme. Velikost síly F si můžeme vyjádřit jako

$$F = BIR\,,$$

takže pro normálové napětí platí

$$\sigma = \frac{\Delta l}{l_0} E = -\frac{BIR}{S}\,.$$

Odtud získáme změnu délky

$$\Delta l = \frac{2\pi R_0^2 IB}{R_0 IB - \pi r^2 E}\,.$$

Nás však zajímá, o kolik se délka smyčky zmenšila, tedy $|\Delta l|$. Po číselném dosazení máme $|\Delta l| \doteq 0{,}85\,\mathrm{mm}$.

Václav Mikeska
v.mikeska@fykos.cz

Úloha FoL.42 ... trénink na kosmonauty 5 bodů

Máme řetízkový kolotoč umístěný na povrchu Země (takže známe tíhové zrychlení g). S jakou frekvencí (kolikrát za sekundu) by se musel otáčet, aby návštěvníci na něm jedoucí cítili zrychlení celkem $2g$? Řetízkový kolotoč můžeme považovat za kruhovou desku o poloměru $R = 3{,}5\,\mathrm{m}$ umístěnou ve výšce $H = 4\,\mathrm{m}$ nad zemí, na jejímž okraji jsou připevněné závěsy pro sedačky. Pro jednoduchost považujme člověka sedícího na sedačce za hmotný bod ve vzdálenosti $l = 3\,\mathrm{m}$ od závěsu, který považujeme za nehmotný, s konstantní délkou a v závěsu dokonale ohebný. Neuvažujte odporové síly. *Karel se díval na Kosmo.*

Z pohledu návštěvníka kolotoče na nás působí tíhová síla a odstředivá síla, které nás přitlačí do sedačky. Proti nim pak působí tlaková síla sedačky. Jim odpovídající zrychlení spočítáme vydělením naší hmotností. Potom chceme, aby se tíhové a odstředivé zrychlení sečetly na $2g$. Odtud si vyjádříme odstředivé zrychlení jako

$$a = \sqrt{(2g)^2 - g^2} = \sqrt{3}g\,.$$

Zároveň pro něj platí

$$a = \omega^2 r = 4\pi^2 f^2 r\,,$$

kde r je poloměr otáčení sedačky a f je hledaná frekvence. Poloměr otáčení spočítáme jako vzdálenost závěsu od osy otáčení (tedy R) a vodorovnou délku závěsu. Nyní si už jen stačí uvědomit, že vodorovná a skutečná délka závěsu budou ve stejném poměru jako odstředivé a celkové zrychlení, tedy $\sqrt{3}/2$. Odtud máme

$$r = R + \frac{\sqrt{3}}{2}l\,.$$

Dosazením do rovnic výše dostáváme výsledek

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{r}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\sqrt{3}g}{R + \frac{\sqrt{3}}{2}l}} \doteq 0{,}266\,\mathrm{Hz}\,.$$

Kolotoč by se musel otáčet s frekvencí $0{,}266\,\mathrm{Hz}$.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FoL.43 ... exotické pole 6 bodů

Vítek při studiu narazil na velmi exotické pole dávající zvláštní výsledky. Mějme malou kuličku (bodovou) o hmotnosti $m = 1{,}00\,\mathrm{kg}$, která se nachází v klidu v poli dané funkčním předpisem $V(x) = -Ax^{10}\exp(Bx)$, kde A a B jsou kladné konstanty. Do kuličky lehce šťouchneme a vyvedeme ji z rovnovážné polohy. Pro $A = 2{,}00\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-8}{\cdot}s^{-2}}$ a $B = 0{,}01\,\mathrm{m^{-1}}$ určete periodu malých kmitů kuličky kolem její rovnovážné polohy v tomto poli.

Vítek si představuje Matěje, jak provádí experimenty.

Pro řešení úlohy si musíme uvědomit, že prakticky každá rozumná funkce je v okolí svého minima v dostatečné aproximaci parabola. Tuhost systému se dá nahradit výrazem $V''(x_0)$, kde x_0 je rovnovážná poloha. Začněme s jejím nalezením

$$V'(x) = -\left(10 + Bx\right) Ax^9 \exp(Bx)\,,$$
$$V'(x_0) = 0\,,$$
$$x_0 = -\frac{10}{B}\,.$$

Nyní stačí nalézt druhou derivaci potenciálu a dosadit do ní rovnovážnou polohu, tedy

$$V''(x) = -\left(Bx + (9 + Bx)\left(10 + Bx\right)\right) Ax^8 \exp(Bx)\,,$$
$$V''(x_0) = \frac{10^9 A}{B^8} \exp(-10)\,.$$

Pro periodu malých kmitů pak píšeme vztah

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{V''(x_0)}} = 2\pi\sqrt{\frac{mB^8}{10^9 A}\exp(10)}\,.$$

Po dosazení hodnot ze zadání získáme $T \doteq 2{,}09 \cdot 10^{-10}$ s.

Vít Beran
vit.beran@fykos.cz

Úloha FoL.44 ... identita tyče 8 bodů

Vítek měl v obvodu zapojený vodič válcového tvaru o poloměru $R = 1{,}20\,\mathrm{cm}$ z neznámého materiálu. Znal ale velikosti hustoty energie magnetického pole $w_{\mathrm{mag}} = 0{,}50\,\mathrm{J{\cdot}m^{-3}}$ a hustoty energie elektrického pole $w_{\mathrm{el}} = 2{,}50 \cdot 10^{-17}\,\mathrm{J{\cdot}m^{-3}}$ těsně nad povrchem vodiče. Obě pole jsou všude rovnoběžná s povrchem vodiče. Vítek navíc magnetem zjistil, že vodič je nemagnetický. Uvažujte, že vodič obklopuje vzduch. Hallův jev se neprojeví. Pomocí těchto údajů spočtěte konduktivitu materiálu. *Vítek chtěl přijít se vzorečkovou úlohou.*

Pro hledanou konduktivitu můžeme psát skalární vztah z Ohmova zákona v lokálním tvaru

$$\sigma = \frac{j}{E}\,,$$

kde E je velikost intenzity elektrického pole, které pohání volné nosiče náboje, a pro hustotu proudu j platí

$$j = \frac{I_R}{S}\,,$$

kde $S = \pi R^2$ je plocha průřezu vodiče do vzdálenosti R od osy, kterou prochází proud I_R. Dále si můžeme napsat definiční vztahy pro hustotu energie elektrického a magnetického pole

$$w_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\,,$$
$$w_{\mathrm{mag}} = \frac{1}{2\mu_0} B^2(R)\,.$$

Elektrické pole E je konstantní, tudíž nám stačí nalézt velikost stacionárního magnetického pole $B(R)$. To můžeme provést aplikováním Ampérova zákona

$$B(R) = \frac{\mu_0 I_R}{2\pi R}\,.$$

Dosadíme-li zpět do rovnice pro hustotu energie magnetického pole a vyjádříme-li si čtverec proudu procházejícího vodičem, dostaneme

$$I_R^2 = \frac{8\pi^2 R^2 w_{\mathrm{mag}}}{\mu_0}\,.$$

Následně si ze vzorce pro hustotu energie elektrického pole vyjádříme čtverec intenzity elektrického pole E jako

$$E^2 = \frac{2w_{\mathrm{el}}}{\varepsilon_0}\,.$$

Nakonec dosadíme zpět do původní rovnice pro konduktivitu

$$\sigma = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\sqrt{\frac{w_{\mathrm{mag}}}{w_{\mathrm{el}}}} = \frac{2}{R}\frac{1}{Z_0}\sqrt{\frac{w_{\mathrm{mag}}}{w_{\mathrm{el}}}}\,,$$

kde Z_0 je impedance vakua. Po dosazení hodnot získáme $\sigma \doteq 6{,}26 \cdot 10^7\,\Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. Neznámý vodič je zřejmě vyrobený ze stříbra.

Vít Beran
`vit.beran@fykos.cz`

Úloha FoL.45 ... dvojice — 8 bodů

Sodíkovou lampou jsme symetricky ozářili dvě štěrbiny vzdálené od sebe $a = 0{,}10\,\mathrm{mm}$*; šířka každé štěrbiny je* $b = 1{,}0\,\mathrm{\mu m}$*. Světlo procházející štěrbinami dopadá na plátno ve vzdálenosti* $d = 1{,}0\,\mathrm{m}$*. Určete poměr intenzity dopadajícího světla v prvním minimu a nultém maximu.*

Předpokládejte, že sodíková lampa vyzařuje pouze na dvou vlnových délkách $\lambda_1 = 589{,}0\,\mathrm{nm}$ *a* $\lambda_2 = 589{,}6\,\mathrm{nm}$ *s poměrem intenzit 2:1.* *Xellos rád ozařuje.*

Je známo, že nulté maximum vzniklého interferenčního obrazce najdeme na ose mezi štěrbinami ($y = 0$) a první minimum, s nulovou intenzitou, je v bodě $y = d\lambda/2a$ na plátně, kde λ označuje vlnovou délku dopadajícího světla. Toto platí jen pro jednu vlnovou délku. Zde máme sice dvě, ale jsou si velmi blízké, takže můžeme předpokládat, že první minimum intenzity je v bodě $y = d\lambda_1/2a + \Delta y$, kde $\Delta y \ll d\lambda_1/2a$.

Intenzita dopadajícího světla jedné vlnové délky λ do tohoto minima je dána přibližným vztahem ($\mathrm{sinc}(x) \equiv \sin x/x$, I_0 je intenzita v nultém maximu)

$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi a y}{\lambda d}\right)\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi b y}{\lambda d}\right)\,.$$

Druhý člen můžeme zanedbat, neboť $b \ll a$, takže v prvním minimu je argument sinc blízký nule a tehdy je sinc přibližně roven jedničce. V blízkosti prvního minima a pro $\lambda \approx \lambda_1$ můžeme odhadnout

$$\cos\frac{\pi a y}{\lambda d} = \cos\left(\frac{\pi a}{\lambda d}\left(\frac{d\lambda_1}{2a} + \Delta y\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda} - \frac{\pi a}{\lambda d}\Delta y\right) \approx \frac{\pi}{2}\frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda} - \frac{\pi a}{\lambda d}\Delta y\,,$$

$$I \approx I_0\left(\frac{\pi}{2}\frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda} - \frac{\pi a}{\lambda d}\Delta y\right)^2\,.$$

Pro dvě vlnové délky máme $I = I_1 + I_2$, kde intenzita první vlnové délky na ose (v nultém maximu) je $2I_0$ a intenzita druhé je I_0. Pak pomocí uvedené aproximace platí v prvním minimu

$$\begin{aligned}\frac{I}{I_0} &= 2\cos^2\left(\frac{\pi a y}{\lambda_1 d}\right)\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi b y}{\lambda_1 d}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi a y}{\lambda_2 d}\right)\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi b y}{\lambda_2 d}\right)\\ &\approx 2\left(\frac{\pi a}{\lambda_2 d}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\pi a}{\lambda_2 d}\Delta y\right)^2\\ &\approx 2\left(\frac{\pi a}{\lambda d}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\delta\lambda - \frac{\pi a}{\lambda d}\Delta y\right)^2 ,\end{aligned}$$

kde jsme označili jednu z vlnových délek λ a relativní odchylku $\delta\lambda = |\lambda_1 - \lambda_2|/\lambda$; jelikož hodnoty vlnové délky jsou dostatečně blízké, výsledek by měl záviset pouze na jejich rozdílu a přibližné hodnotě (tj. za λ můžeme dosadit libovolnou z vlnových délek). Získali jsme pro I/I_0 kvadratickou funkci ve tvaru $2A^2x^2 + (C - Ax)^2 = 3A^2x^2 + C^2 - 2ACx$, kde neznámá x odpovídá Δy a koeficienty jsou $C = \pi\delta\lambda/2$ a $A = \pi a/\lambda d$. Dle známého vzorce je minimum této kvadratické funkce v bodě $x = \frac{C}{3A}$ a dosazením dostaneme hodnotu $2C^2/3$. Intenzita světla v prvním minimu je tedy

$$I_{\mathrm{min},\,1} = I_0\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2}\delta\lambda\right)^2 ,$$

což musíme ještě vydělit intenzitou uprostřed (v nultém maximu) $2I_0 + I_0 = 3I_0$. Výsledný poměr je tedy

$$\frac{I_{\mathrm{min},\,1}}{I_{\mathrm{max},\,0}} = \frac{2}{9}\left(\frac{\pi}{2}\delta\lambda\right)^2 \doteq 5{,}7\cdot 10^{-7} .$$

Můžeme si všimnout, že výsledek dost výrazně závisí na poměru intenzit čar sodíku, ale vůbec nezávisí na geometrii experimentu!

Jakub Šafin
`xellos@fykos.cz`

Úloha FoL.46 ... stelární plachetnice — 8 bodů

Ve vzdálenosti $d = 100\,\mathrm{AU}$ od Slunce se nachází zrcadlo s plochou $S = 100\,\mathrm{km}^2$, které se pohybuje pryč od Slunce rychlostí $v = 0{,}4c$. Zrcadlo je docela podivné. Odráží totiž (dokonale) pouze světlo v úzkém rozsahu $\langle 400\,\mathrm{nm}, 500\,\mathrm{nm}\rangle$ a ostatní vlnové délky dokonale propouští. Najděte sílu, kterou působí (z pohledu zrcadla) sluneční záření na zrcadlo. Předpokládejte, že Slunce je dokonale černé těleso s povrchovou teplotou $T = 6\,000\,\mathrm{K}$ a poloměrem $R = 7\cdot 10^5\,\mathrm{km}$.

Xellos by chtěl mít Solar Sailer.

Intenzitu vyžarovania čierneho telesa popisuje Planckov zákon

$$\Delta\Phi(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\exp(h\nu/k_BT) - 1}\Delta\nu ,$$

$$\Delta\Phi(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp(hc/\lambda k_BT) - 1}\Delta\lambda ,$$

kde $\Delta\lambda$ je dostatočne krátky interval vlnových dĺžok okolo vlnovej dĺžky λ, resp. frekvencie $\nu = c/\lambda$. $\Delta\Phi$ je uhlový tok výkonu vyžarovaný na tomto intervale vlnových dĺžok; na zrkadlo s plochou S dopadá pod priestorovým uhlom $\vartheta \approx S/d^2$ a dopadajúci výkon (stále na intervale vlnových dĺžok) dostaneme ako $\Delta P = \Delta\Phi \cdot \vartheta$. Keďže hybnosť fotónu s relativistickou hmotnosťou m je mc a jeho energia je mc^2, vieme výkon (energiu za jednotku času) previesť na silu (hybnosť za jednotku času) predelením c. Zrkadlo fotóny neabsorbuje, ale odráža, takže medzi dopadajúcim výkonom P a hľadanou silou F platí vzťah

$$F = \frac{2P}{c}\,.$$

Teraz potrebujeme vypočítať P. Keďže poznáme závislosť výkonu na vlnovej dĺžke, môžeme celkový výkon v intervale $\langle 400\,\mathrm{nm}, 500\,\mathrm{nm}\rangle$ vypočítať buď numerickým integrovaním alebo jednoduchšie tak, že si rozdelíme tento interval na niekoľko dostatočne malých podintervalov, v každom z ktorých už spočítame celkový výkon odhadom a výsledky sčítame (čo je vlastne podstata numerického integrovania). Chyták je v tom, že Planckov zákon sa v relativistických sústavách mení. Pracujme v sústave, ktorá sa pohybuje konštantnou rýchlosťou v, aby nám stačila špeciálna teória relativity (chyba spôsobená zanedbaním zrýchlenia na krátkom časovom úseku je zanedbateľná). Tok výkonu potom vyzerá takto:

$$\Delta\Phi'(\nu') = \frac{2h\nu'^3}{c^2}\beta^3 \frac{1}{\exp(h\nu'/k_B\beta T) - 1}\Delta\nu'\,.$$

Frekvenciu svetla z pohľadu zrkadla sme označili ako ν' a ďalej sme zaviedli

$$\beta = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}\,.$$

Z relativistického Dopplerovho efektu dostávame $\nu' = \nu\beta$ a výraz pre $\Delta\Phi'(\nu)$ vyzerá veľmi podobne, ako keby sme len dosadili za ν, ale to by sa objavil faktor β^{-4}, nie β^3. Odvodenie $\Delta\Phi'$ je dosť zložité, spomeňme len, že chceme, aby stále šlo o žiarenie čierneho telesa, ale s teplotou $T' = \beta T$, a že faktor β^3 vychádza z deformácie priestoročasu. Pomocou vlnovej dĺžky λ' z pohľadu zrkadla (lebo odrazivosť zrkadla je daná v sustave spojenej s ním) vyjadríme

$$\Delta\Phi'(\lambda') = \frac{2hc^2}{\lambda'^5}\beta^3 \frac{1}{\exp(hc/\lambda' k_B\beta T) - 1}\Delta\lambda'\,.$$

Pri prevode na výkon si tiež musime dať pozor, lebo z pohľadu zrkadla je Slnko vo vzdialenosti $d' = d\gamma$, kde $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Potom je uhol, pod ktorým „vidí“ zrkadlo žiarenie zo Slnka, rovný $\vartheta' = \vartheta/\gamma^2 = \vartheta(1 - v^2/c^2)$. Výsledná sila je teda

$$F = \frac{4hSc}{d^2}\left(1 - v/c\right)^{5/2}\left(1 + v/c\right)^{-1/2}\int_{\lambda_b}^{\lambda_r} \lambda'^{-5}\frac{1}{\exp\left(\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\,\frac{hc}{\lambda' k_B T}\right) - 1}\mathrm{d}\lambda' \doteq 1{,}32 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{N}\,.$$

Tento výsledok môžeme v rámci požadovanej presnosti dostať aj tak, že namiesto integrovania zoberieme hodnotu integrovaného výrazu v bode $\lambda' = 450\,\mathrm{nm}$ a budeme predpokladať že máme integrál z konštanty, takže túto hodnotu len prenásobíme dĺžkou intervalu $100\,\mathrm{nm}$. Výsledok sa odchýli iba o asi $0{,}02\,\%$.

Jakub Šafin
`xellos@fykos.cz`

Úloha FoL.47 ... přehoď si válec 6 bodů

Na zemi leží obří válec o poloměru $R = 10\,\mathrm{m}$. Jakou nejmenší rychlostí musíte z nulové výšky vyhodit kámen, abyste válec přehodili?

Jáchym si tipnul zadání úlohy podle obrázku z jedné španělské učebnice.

Umístěme si průřez válcem do souřadnicové soustavy tak, že bude popsán rovnicí

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2 .$$

Námi vystřelený kámen při svém letu opíše parabolu

$$y = -ax^2 + c , \tag{2}$$

kde a, c jsou nějaké kladné konstanty. Lineární člen chybí, protože parabola musí být z povahy úlohy symetrický okolo svislé osy procházející středem kružnice z první rovnice. Kružnice se zřejmě musí vejít pod parabolu. Aby počáteční rychlost byla co nejmenší, musí být parabola ke kružnici co nejblíže – prakticky se musí dotknout ve dvou bodech, souměrných podle osy y (že nepůjde o případ, kdy se kružnice a parabola dotýkají jenom v jednom bodě, vyplyne z řešení). Průsečíky křivek nalezneme dosazením druhé rovnice do první

$$a^2x^4 + (1 + 2a(R - c))\, x^2 + c\,(c - 2R) = 0 ,$$

což je bikvadratická rovnice, jejímž řešením je

$$x^2 = \frac{2a(c - R) - 1 \pm \sqrt{(1 + 2a(R - c))^2 + 4a^2c(2R - c)}}{2a^2} .$$

Chceme, aby průsečíky představovaly body dotyku, a ty mohou být nejvýše dva – jeden se souřadnicí $-x_\mathrm{t}$ a druhý s x_t. Musí tedy existovat pouze jedno x_t^2, tedy diskriminant bikvadratické rovnice musí být nulový. Odtud dostáváme rovnici

$$4R^2a^2 + 4(R - c)a + 1 = 0 ,$$

ze které si vyjádříme

$$c = \frac{4R^2a^2 + 4Ra + 1}{4a} . \tag{3}$$

Označíme-li průsečík paraboly s osou x (tedy bod, ze kterého kámen vyhodíme) jako $-x_0$, potom dopadne do bodu x_0. Pokud celý let trval čas T, platí

$$T = \frac{2v_y}{g} = \frac{2x_0}{v_x} ,$$

odkud si můžeme vyjádřit

$$x_0 = \frac{v_xv_y}{g} . \tag{4}$$

Pohybové rovnice kamene jsou

$$x = -x_0 + v_xt ,$$
$$y = v_yt - \frac{1}{2}gt^2 .$$

Z první rovnice si vyjádříme čas t, který rovnou dosadíme do druhé a dostáváme trajektorii šikmého vrhu

$$y = \frac{v_y}{v_x}(x_0 + x) - \frac{g}{2v_x^2}(x_0 + x)^2 \,.$$

Dosazení za x_0 podle rovnice (4) vede na vztah

$$y = -\frac{g}{2v_x^2}x^2 + \frac{v_y^2}{2g} \,,$$

který odpovídá vztahu (2). Odtud si už snadno vyjádříme

$$a = \frac{g}{2v_x^2} \,,$$
$$c = \frac{v_y^2}{2g} \,.$$

Pro počáteční rychlost kamene tak platí

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = g\left(\frac{1}{2a} + 2c\right) \,.$$

Nyní můžeme dosadit za c ze vztahu (3) a dostaneme

$$v^2 = g\left(2R^2a + 2R + \frac{1}{a}\right) \,.$$

Velikost rychlosti v bude minimální při minimální hodnotě v^2. Tu najdeme položením derivace v^2 podle a rovnu nule, tedy

$$\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}a} = g\left(2R^2 - a^{-2}\right) = 0 \,,$$
$$a = 2^{-1/2}R^{-1} \,.$$

Pomocí této podmínky si už snadno vyjádříme $v = \sqrt{2gR(1+\sqrt{2})} \doteq 21{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FoL.48 ... zlá pružina 9 bodů

Mějme homogenní pružinku s klidovou délkou $l = 11{,}3\,\mathrm{cm}$, tuhostí $k = 125\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-2}}$ a délkovou hustotou $\lambda = 9{,}7\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-1}}$, která leží na vodorovné podložce. Následně jeden konec pevně uchytíme (ale tak, aby se kolem něj pružinka mohla otáčet) a odstraníme podložku. Určete změnu celkové potenciální energie soustavy mezi počátečním stavem a novou rovnovážnou polohou.

Jáchym nemohl přijít na kloub principu propisky.

Pokud pružinku pověsíme do tíhového pole, protáhne se. Nahoře se pružinka natáhne více než dole, tedy délková hustota přestane být konstantou. Nejdříve tedy spočítejme změnu souřadnic při natažení pružinky.

Vezměme si malý kousek Δx z bodu x původní pružinky. Pod ním je zavěšena hmotnost $m(x) = (l-x)\lambda$, tedy v tíhovém poli bude natahován silou $m(x)g$. V důsledku toho se prodlouží na délku

$$\Delta y = \Delta x + \frac{m(x)g}{k'} = \Delta x\left(1 + \frac{(l-x)\lambda g}{kl}\right), \tag{5}$$

kde k' je tuhost daného kousku pružiny. Ta je úměrná tomu, jak malou část z původní pružiny vybereme (odvodit se to dá např. z úvahy o napětí v pružince), neboli

$$k' = k\frac{l}{\Delta x}\,.$$

Zároveň se souřadnice x změní na souřadnici

$$y = \int_0^x \mathrm{d}y = x + \int_0^x \frac{m(x)g}{k'}\,\mathrm{d}x = x + \frac{g\lambda}{kl}\int_0^x (l-x)\,\mathrm{d}x = \left(1 + \frac{g\lambda}{k}\right)x - \frac{g\lambda}{2kl}x^2\,.$$

Využili jsme, že $\Delta y/\Delta x$ z rovnice (5) představuje pro nekonečně malé kousky derivaci $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$.

Nyní pojďme vypočítat změnu tíhové potenciální energie. Na počátku jsou všechny body ve výšce 0, tedy $E_{g0} = 0$. Na konci je každý úsek $\mathrm{d}x$ s hmotností $\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}x$ ve výšce $-y$. Platí

$$E_g = \int_0^m g\,(-y)\;\mathrm{d}m = -g\lambda\int_0^l \left(\left(1+\frac{g\lambda}{k}\right)x - \frac{g\lambda}{2kl}x^2\right)\,\mathrm{d}x = -\left(1 + \frac{2g\lambda}{3k}\right)\frac{g\lambda l^2}{2}\,.$$

Dále ještě musíme spočítat změnu potenciální energie pružnosti. Na počátku je zřejmě $E_{\mathrm{p}0} = 0$. Potom se však každý element Δx natáhne na délku Δy, čemuž odpovídá energie

$$\Delta E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}k'\,(\Delta y - \Delta x)^2 = \frac{kl\,(\Delta y - \Delta x)^2}{2\Delta x} = \frac{(l-x)^2\,\lambda^2 g^2}{2kl}\Delta x\,.$$

Výraz $\Delta E_\mathrm{p}/\Delta x$ můžeme považovat za délkovou hustotu energie (na jednotku délky původní pružiny), kterou zintegrujeme a dostáváme

$$E_\mathrm{p} = \int_0^l \mathrm{d}E_\mathrm{p} = \frac{g^2\lambda^2}{2kl}\int_0^l (l-x)^2\;\mathrm{d}x = \frac{g^2\lambda^2}{2kl}\left[l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^l = \frac{g^2\lambda^2 l^2}{6k}\,.$$

Nakonec už jen spočítáme výslednou změnu celkové potenciální energie

$$\Delta E = \Delta E_g + \Delta E_\mathrm{p} = E_g - E_{g0} + E_\mathrm{p} - E_{\mathrm{p}0} = -\left(1 + \frac{g\lambda}{3k}\right)\frac{g\lambda l^2}{2} \doteq -0{,}762\,\mathrm{J}\,.$$

Na tomto místě si dovolíme krátký komentář. Není náhoda, že po roznásobení člen

$$-\frac{g\lambda l^2}{2}$$

představuje změnu tíhové potenciální energie těžiště pružiny, pokud by se nijak neprotáhla. Tento člen totiž zbyde při limitě $k \to \infty$, která odpovídá právě dokonale tuhé pružině. Druhý člen pak odpovídá energii z natažení pružiny. Můžeme si povšimnout, že tíhová potenciální energie, která se tím uvolnila, byla právě dvakrát větší než potenciální energie pružnosti, která se uložila ve formě natažení pružinky.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha M.1 ... Dyson

3 body

Dysonova sféra je zatím hypotetická konstrukce kolem hvězdy, která ji celou obklopí tak, aby mohla sklízet celý její zářivý výkon. Představme si, že by někdo vzal celou naši Zemi a vytvořil z ní Dysonovu sféru, v jejímž středu by bylo naše Slunce a měla vnější poloměr stejný, jako je střední vzdálenost Země od Slunce, $d_\mathrm{S} = 149\,600\,000\,\mathrm{km}$. *Předpokládejme, že Země je koule o poloměru* $R_\mathrm{Z} = 6\,378\,\mathrm{km}$ *z homogenního nestlačitelného materiálu, takže hustota tenké slupky, která se vytvoří kolem Slunce, bude stejná, jako byla hustota Země. Jakou by měla tloušťku?*

Karel má rád úlohy s Dysonovou sférou.

Vyjdeme ze zachování objemu. Objem Země je $V_\mathrm{Z} = \frac{4}{3}\pi R_\mathrm{Z}^3$. K výpočtu objemu Dysonovy sféry využijeme aproximace, že tloušťka sféry h je mnohem menší než její poloměr. Její objem tedy můžeme spočítat jako povrch vynásobený tloušťkou

$$V_\mathrm{D} \approx S_\mathrm{D} h = 4\pi d_\mathrm{S}^2 h\,.$$

Sami si můžete ověřit, že kdybychom tento objem počítali jako rozdíl objemů dvou koulí, tedy $V_\mathrm{D}' = \frac{4}{3}\pi d_\mathrm{S}^3 - \frac{4}{3}\pi (d_\mathrm{S} - h)^3$, dostali bychom téměř ten jistý výsledek. Nyní už jen použijeme rovnost $V_\mathrm{Z} = V_\mathrm{D}$ jako

$$\frac{4}{3}\pi R_\mathrm{Z}^3 = 4\pi d_\mathrm{S}^2 h\,,$$

$$h = \frac{R_\mathrm{Z}^3}{3 d_\mathrm{S}^2} \doteq 3{,}86 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}\,.$$

Vidíme, že tloušťka v řádu milimetrů je o čtrnáct řádů nižší než d_S, naše aproximace je tedy správná.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha M.2 ... Dyson Reloaded

3 body

Mějme stejnou Dysonovu sféru kolem Slunce jako v předchozí úloze. (Představme si, že by někdo vzal celou naši Zemi a vytvořil z ní Dysonovu sféru, v jejímž středu by bylo naše Slunce a měla vnější poloměr stejný, jako je střední vzdálenost Země od Slunce, $d_\mathrm{S} = 149\,600\,000\,\mathrm{km}$. *Předpokládejme, že Země je koule o poloměru* $R_\mathrm{Z} = 6\,378\,\mathrm{km}$ *z homogenního nestlačitelného materiálu, takže hustota tenké slupky, která se vytvoří kolem Slunce, bude stejná, jako byla hustota Země.) Spočítejte gravitační zrychlení, které by pociťovali kosmonauti stojící na jejím vnějším povrchu. Hmotnost Země je* $M_\mathrm{Z} = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ *a hmotnost Slunce* $M_\mathrm{S} = 1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$.

Karel má velmi rád úlohy s Dysonovou sférou.

Podle Gaussova zákona víme, že gravitační účinky homogenní kulové slupky jsou vně stejné, jako kdyby ve středu slupky byl jeden hmotný bod o stejné hmotnosti. To znamená, že gravitační síla je stejná jako od hmotného bodu s hmotností $M_\mathrm{Z}+M_\mathrm{S}$ ve středu sféry. Gravitační síla způsobena Dysonovou sférou je ale vůči gravitační síle Slunce o šest řádů nižší a proto ji můžeme s klidem zanedbat. Stačí nám využít Newtonův gravitační zákon

$$a_g = \frac{G M_\mathrm{S}}{d_\mathrm{S}^2} \doteq 5{,}93 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,,$$

kde G je Newtonova gravitační konstanta.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha M.3 ... Dyson Reloaded Reloaded 3 body

Prozatím ještě zůstaneme u naší Dysonovy sféry vytvořené ze Země kolem Slunce. (Představme si, že by někdo vzal celou naši Zemi a vytvořil z ní Dysonovu sféru, v jejímž středu by bylo naše Slunce a měla vnější poloměr stejný, jako je střední vzdálenost Země od Slunce, $d_\mathrm{S} = 149\,600\,000\,\mathrm{km}$. Předpokládejme, že Země je koule o poloměru $R_\mathrm{Z} = 6\,378\,\mathrm{km}$ z homogenního nestlačitelného materiálu, takže hustota tenké slupky, která se vytvoří kolem Slunce, bude stejná, jako byla hustota Země.) Už víme, že na vnějším povrchu by se chodilo špatně, ale mohli bychom chodit po vnitřním povrchu? Kolik dní by trval jeden měsíc (tj. dvanáctina z doby oběhu okolo Slunce), kdyby sféra rotovala tak, aby na rovníku bylo tíhové zrychlení stejné jako na (normální) Zemi?

Karel má opravdu fakt hodně rád úlohy s Dysonovou sférou.

Uvědomíme si, že gravitační síla Slunce, kterou jsme spočítali v minulém příkladu, je velmi malá, vůči tíhovému zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ je určitě zanedbatelná. Zároveň gravitační síla sféry je (z Gaussova zákona) uvnitř nulová. Stačí nám tedy použít vzorec pro odstředivé zrychlení

$$g \approx \omega^2 d_\mathrm{S}\,,$$

$$\omega \approx \sqrt{\frac{g}{d_\mathrm{S}}}\,,$$

$$t \approx \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{d_\mathrm{S}}{g}} \doteq 64\,660\,\mathrm{s} \doteq 0{,}748\,\mathrm{dne}\,,$$

kde jsme použili vztah $t = \frac{T}{12} = \frac{2\pi}{12\omega}$ pro přepočet úhlové rychlosti a periody.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha M.4 ... Dyson Reloaded^3 3 body

Naposledy se ještě zamyslíme nad Dysonovou sférou. Slibuji, že je to naposledy. (Představme si, že by někdo vzal celou naši Zemi a vytvořil z ní Dysonovu sféru, jejíž vnější poloměr by byl stejný, jako je střední vzdálenost Země od Slunce, $d_\mathrm{S} = 149\,600\,000\,\mathrm{km}$. Předpokládejme, že Země je koule o poloměru $R_\mathrm{Z} = 6\,378\,\mathrm{km}$ z homogenního nestlačitelného materiálu, takže hustota tenké slupky, která se vytvoří kolem Slunce, bude stejná, jako byla hustota Země.) Tentokrát uvažujme, že inženýři udělali někde chybu a nepostavili jí okolo Slunce. Sféra zůstává stejná (tedy se stejným poloměrem a vyrobena z hmoty celé Země), nerotuje, ale uprostřed ani nikde poblíž se nevyskytují žádné hvězdy ani planety. Určete minimální hodnotu tlaku (mechanického napětí), kterou musí zemský materiál vydržet, aby se sféra nezhroutila pod vlastní vahou.

Matěj se nakazil od Karla a už má taky rád Dysonovy sféry.

Máme slupku tloušťky h, které vysekneme malou „výseč“. Spočtěme si sílu, kterou je tento malý úsek slupky zabírající povrch $\mathrm{d}S$ (v aproximaci pro malou výseč zabírá stejný vnitřní i vnější povrch) přitahován do středu. Využijeme-li Gaussova zákona, získáme závislost gravitačního zrychlení na poloze ve slupce. Uvažujme konstantní hustotu a označme v tomto případě vnitřní poloměr d_S, pak

$$a(x) = G\frac{M_\mathrm{Z}x}{h(d_\mathrm{S}+x)^2} \approx \frac{GM_\mathrm{Z}x}{hd_\mathrm{S}^2}\,,$$

kde x značí vzdálenost bodu, kde působí zrychlení a, od vnitřního povrchu sféry a $\frac{M_\mathrm{Z}x}{h}$ je (v lineární aproximaci) hmotnost, která se nachází blíže středu.[2]

Nyní integrováním gravitační síly přes slupku dostaneme sílu působící na tento úsek slupky

$$\mathrm{d}F = \int_0^h a(x)\varrho\,\mathrm{d}S\mathrm{d}x = \frac{GM_\mathrm{Z}\varrho\mathrm{d}S}{hd_\mathrm{S}^2}\int_0^h x\,\mathrm{d}x = \frac{GM_\mathrm{Z}h\varrho\mathrm{d}S}{2d_\mathrm{S}^2} = \frac{GM_\mathrm{Z}\sigma\mathrm{d}S}{2d_\mathrm{S}^2}\,,$$

kde ϱ značí hustotu a $\sigma = \varrho h = \frac{M_\mathrm{Z}}{4\pi d_\mathrm{S}^2}$ plošnou hustotu slupky.

Využujeme analogie vzdušné bublinky ve vodě. Tato síla na jednotku objemu odpovídá tlaku

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S} = p_p = \frac{GM_\mathrm{Z}\sigma}{2d_\mathrm{S}^2}\,.$$

Kulovou slupku si tedy můžeme představit, jako kdyby se nacházela v prostředí s konstantním hydrostatickým tlakem p_p, který nahrazuje působení gravitačních sil.

Na její středový průřez působí síla

$$F_p = \pi d_\mathrm{S}^2 p_p = \frac{\pi GM_\mathrm{Z}\sigma}{2} = \frac{GM_\mathrm{Z}^2}{8d_\mathrm{S}^2}\,,$$

kde jsme dosadili za plošnou hustotu. Toto je síla, která přitlačuje dvě polokoule k sobě. Tato síla se rozloží po daném průřezu (obsah průřezu je $2\pi d_\mathrm{S}h$). Materiál, ze kterého je slupka vyrobena, musí tedy ustát tlak

$$p = \frac{F_p}{2\pi d_\mathrm{S}h} = \frac{GM_\mathrm{Z}^2}{16\pi d_\mathrm{S}^3 h} = \frac{3GM_\mathrm{Z}^2}{16\pi d_\mathrm{S} R_\mathrm{Z}^3} \doteq 3{,}66\,\mathrm{MPa}\,.$$

Vzhledem k tomu, že je slupka velmi tenká, můžeme tlak uvnitř materiálu považovat za konstantní.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha E.1 ... ach ta baterie 3 body

Představte si, že máte zcela vybitou autobaterii ($U = 12\,\mathrm{V}$) a máte nabíjecí přístroj, který zvládne dodávat baterii proud $I = 3{,}0\,\mathrm{A}$. Pokud máte čas nabíjet ji $t = 75\,\mathrm{min}$, na jakou úroveň nabití se za tu dobu dostane, pokud má kapacitu $60\,\mathrm{Ah}$? Odpověď chceme udat v procentu celkové kapacity. *Karel. Ani se neptejte...*

[2] To je v podstatě stejná aproximace, jakou jsme použili v příkladu M1 při výpočtu objemu, protože vnitřní hmotnost je $\frac{V_\mathrm{in}}{V}M_\mathrm{Z} = \frac{\frac{4}{3}\pi(d_\mathrm{S}+x)^3 - \frac{4}{3}\pi d_\mathrm{S}^3}{\frac{4}{3}\pi(d_\mathrm{S}+h)^3 - \frac{4}{3}\pi d_\mathrm{S}^3}M_\mathrm{Z} \approx \frac{4\pi d_\mathrm{S}x}{4\pi d_\mathrm{S}h}M_\mathrm{Z} = \frac{x}{h}M_\mathrm{Z}$.

Převedeme si údaj o čase na hodiny, tedy $t = 1{,}25\,\mathrm{h}$ (vzhledem k tomu, že máme udanou kapacitu v Ah). Za tu dobu se na baterii dostane náboj $Q = It = 3{,}75\,\mathrm{Ah}$. Kapacita baterie je $Q_{\mathrm{max}} = 60\,\mathrm{Ah}$. Podíl nabití je tedy $k = Q/Q_{\mathrm{max}} = 6{,}25\,\%$. Baterie se nabije pouze z necelých $6{,}3\,\%$.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha E.2 ... vnitřní odpor

3 body

Připojíme-li k neideálnímu zdroji stejnosměrného elektrického napětí dva sériově spojené shodné rezistory, je účinnost zdroje 0,87*. Určete účinnost zdroje, jestliže spojení rezistorů změníme na paralelní.*

Potýkali jsme se s revolucí.

Označíme-li R_{i} vnitřní odpor zdroje a R celkový odpor dvou sériově spojených rezistorů, pak pro účinnost při sériovém spojení platí

$$\eta_1 = \frac{R}{R + R_{\mathrm{i}}}\,.$$

Z rovnice plyne

$$R_{\mathrm{i}} = R\frac{1 - \eta_1}{\eta_1}\,.$$

Pro účinnost při paralelním spojení rezistorů (ve kterém mají celkový odpor $R/4$) pak dostaneme

$$\eta_2 = \frac{\frac{R}{4}}{\frac{R}{4} + R_{\mathrm{i}}} = \frac{R}{R + 4R_{\mathrm{i}}} = \frac{R}{R + 4R\frac{1-\eta_1}{\eta_1}} = \frac{\eta_1}{4 - 3\eta_1} \doteq 0{,}626\,.$$

Účinnost zdroje je 0,626.

Josef Jírů
`jiru@gyoa.cz`

Úloha E.3 ... pohlavně zneužitý panel

3 body

Fotovoltaický panel umístěný naplocho má při kolmém dopadu slunečního světla výkon $300\,\mathrm{W}$*. Jaký bude jeho výkon v 10:00, když Slunce vyšlo v 6:00 a zapadne v 18:00? V poledne na panel dopadají paprsky pod úhlem* 20° *vzhledem ke kolmici.*

Jeda zelené wasabi vzpomínaje na zelenou energii, špatně píše přechodníky.

Účinnost panelu závisí na množství dopadajícího světla, jež lze vypočítat kolmou projekcí slunečního světla na daný panel. Označíme-li sluneční výkon P_0, je v poledne účinnost dána vztahem $P_{\mathrm{p}} = P_0 \cos 20^\circ$. Ve 12:00 nastává pravé poledne a úhel, pod kterým vidíme slunce v 10:00, se liší o $\frac{2}{24}360^\circ = 30^\circ$. Tato změna je ve směru kolmém na směr sklonu Slunce v pravé poledne (neovlivní tedy dvacetistupňový úhel sklonu směrem na jih (resp. sever, pokud žijeme na jižní polokouli)), výsledek tedy stačí znovu přenásobit členem odpovídajícímu příslušnému natočení. Přepočteno na výkon dostáváme vztah

$$P = P_0 \cos 20^\circ \cos 30^\circ \doteq 244\,\mathrm{W}\,,$$

který vrátí kýženou hodnotu výkonu solárního panelu. Uvědomme si, že výpočet byl takto jednoduchý jen proto, že dopadající paprsky byly kolmé na osu rotace Země. To je způsobeno tím, že výkon panelu sledujeme během rovnodennosti, jak je naznačeno časy východu a západu Slunce v zadání. V obecném případě by bylo nutno užít sférickou trigonometrii.

Jan Střeleček `strelda@fykos.cz` ***Václav Mikeska*** `v.mikeska@fykos.cz` ***Matěj Mezera*** `m.mezera@fykos.cz`

Úloha E.4 ... transformujeme — 3 body

Mějme transformátor, jehož primární cívka má $N_1 = 100$ závitů a sekundární cívka $N_2 = 300$ závitů. Ke druhé cívce připojíme žárovku s odporem $R = 25{,}0\,\Omega$ a chceme, aby její výkon byl $P = 200\,\mathrm{W}$. Jaké efektivní napětí musíme připojit k první cívce transformátoru?

Danka vzpomínala na úkoly na střední.

Označme U_1, U_2 postupne napätia na prvej a druhej cievke transformátora. Výkon žiarovky súvisí s efektívnym napätím na ňu privedeným vzťahom

$$P = \frac{U_2^2}{R}\,.$$

Napätia na transformátore sa transformujú v rovnakom pomere ako je pomer počtu závitov, teda

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}\,.$$

Stačí už len vyjadriť

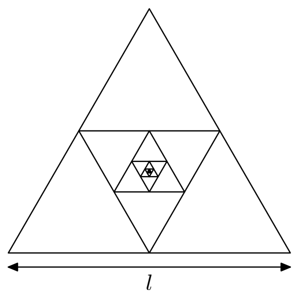
$$U_1 = \frac{N_1}{N_2}U_2 = \frac{N_1}{N_2}\sqrt{PR} \doteq 23{,}6\,\mathrm{V}\,.$$

Na prvú cievku transformátora musíme priviesť napätie 23,6 V.

Daniela Pittnerová `daniela@fykos.cz`

Úloha X.1 ... čistě fraktálová — 3 body

Matěj má rád fraktály, a tak si z nekonečně tenkého drátu o délkové hustotě $\lambda = 100\,\mathrm{g\cdot m^{-1}}$ jeden vyrobil. Začal rovnostranným trojúhelníkem o straně délky $l = 10\,\mathrm{cm}$. Do něj doplnil střední příčky, pak doplnil střední příčky do trojúhelníku vzniklého uprostřed a tak dál... Výsledek je na obrázku. Jakou hmotnost má Matějův fraktál? *Matěj má rád nekonečna.*



Jelikož střední příčka má poloviční délku strany původního trojúhelníka, má každý další přidaný trojúhelník poloviční obvod, než předchozí trojúhelník. Obvod původního trojúhelníka je $3l$, celková délka spotřebovaného drátu tedy je

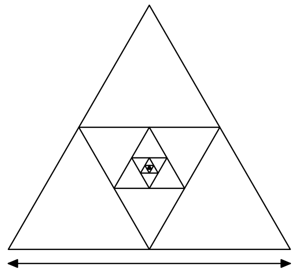
$$3l + \frac{3l}{2} + \frac{3l}{4} + \frac{3l}{8} + \cdots = 3l\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 6l$$

Celková hmotnost tedy je $6l\lambda = 60\,\mathrm{g}$.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha X.2 ... prostě fraktálová 3 body

Matěj si hraje stále se stejným fraktálem o rozměru $l = 10\,\mathrm{cm}$ a délkové hustotě $\lambda = 100\,\mathrm{g{\cdot}m^{-1}}$. Zajímá ho, jaký je jeho moment setrvačnosti vůči ose procházející těžnicí trojúhelníka. Spočítejte ho. *Matěj má hodně rád nekonečna.*



Moment setrvačnosti jednoho rovnostranného trojúhelníka vůči jeho těžnici můžeme spočítat podle vzorečku pro moment setrvačnosti homogenní tyče o hmotnosti $3l\lambda$ a délce l kolem kolmé osy procházející středem[3]

Moment setrvačnosti největšího trojúhelníka vůči dané ose tedy je

$$J_0 = \frac{1}{12} 3l\lambda l^2 = \frac{1}{4}\lambda l^3\,.$$

Protože každý další trojúhelník má poloviční délku strany než předchozí, můžeme pro moment setrvačnosti n-tého trojúhelníka psát

$$J_n = \frac{1}{4}\lambda \left(\frac{l}{2^n}\right)^3 = \frac{1}{4}\lambda \frac{l^3}{8^n}\,.$$

Výšky všech trojúhelníků leží na stejné přímce, lze tedy využít aditivity momentu setrvačnosti a celkový moment zapsat jako sumu

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} J_n = \frac{1}{4}\lambda l^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8^n} = \frac{2}{7}\lambda l^3 = 2{,}9 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,.$$

Přitom jsme využili vzorec pro součet geometrické řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}\,,$$

který obecně platí pro všechna $|a| < 1$.

Stejného výsledku dosáhneme, pokud si uvědomíme, že po odstranění vnějšího trojúhelníka nám zbyde poloviční fraktál, než jsme měli původně. Moment setrvačnosti fraktálu závisí na třetí mocnině délky jeho strany, takže platí

$$J = J_0 + \frac{J}{8}\,,$$

odkud si můžeme vyjádřit

$$J = \frac{8}{7} J_0 = \frac{2}{7}\lambda l^3 \doteq 2{,}9 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,.$$

[3] Protože moment setrvačnosti závisí pouze na vzdálenosti hmoty od osy a trojúhelník má v každé vzdálenosti od těžnice stejné množství hmoty.

Hledaný moment setrvačnosti je $2{,}9 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$.

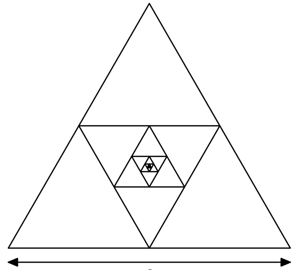
Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha X.3 ... docela fraktálová

3 body

Matěj si svůj fraktál (o rozměru $l = 10\,\mathrm{cm}$ a délkové hustotě $\lambda = 100\,\mathrm{g{\cdot}m^{-1}}$) zavěsil za jeden vrchol a rozkmital ho kolem tohoto vrcholu v rovině fraktálu. Jakou sleduje periodou kmitů?

Matěj má opravdu hodně moc rád nekonečna.



Postupujeme podobně jako v předchozí úloze. Nejprve si spočítáme moment setrvačnosti fraktálu kolem kolmé osy procházející jeho středem. Moment setrvačnosti největšího trojúhelníka J_0 se skládá ze tří stejných momentů jednotlivých stran

$$\frac{1}{12}\lambda l^3\,,$$

ke kterým musíme podle Steinerovy věty ještě příčíst člen

$$\lambda l\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)^2 = \frac{1}{12}\lambda l^3\,,$$

který vyjadřuje posun osy o třetinu výšky trojúhelníka. Celkový moment setrvačnosti největšího trojúhelníka bude

$$J_0 = 3\left(\frac{1}{12}\lambda l^3 + \frac{1}{12}\lambda l^3\right) = \frac{1}{2}\lambda l^3\,.$$

Moment setrvačnsti n-tého vnitřního trojúhelníka spočítáme analogicky

$$J_n = \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{l}{2^n}\right)^3 = \frac{1}{2}\lambda\frac{l^3}{8^n}\,.$$

Celkový moment setrvačnosti vůči ose procházející středem bude

$$J_\mathrm{s} = \sum_{n=0}^{\infty} J_n = \frac{1}{2}\lambda l^3 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{8^n} = \frac{4}{7}\lambda l^3\,.$$

Znovu použijeme Steinerovu větu a spočítáme moment setrvačnosti okolo osy otáčení

$$J = J_\mathrm{s} + M\left(\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)^2 = \frac{18}{7}\lambda l^3\,,$$

kde $M = 6\lambda l$ je celková hmotnost fraktálu (kterou jsme vypočítali v první úloze) a nyní posouváme osu o dvě třetiny výšky. Nakonec dosadíme do vzorce pro periodu fyzického kyvadla

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{Mgr}}\,,$$

kde $r = l/\sqrt{3}$ je vzdálenost těžiště od osy otáčení. Dostáváme

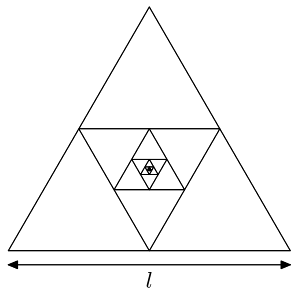
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3\sqrt{3}l}{7g}} \doteq 0{,}547\,\mathrm{s}\,.$$

Perioda kmitů fraktálu okolo osy procházející jedním z jeho vrcholů je $0{,}547\,\mathrm{s}$.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha X.4 . . . velmi fraktálová

3 body

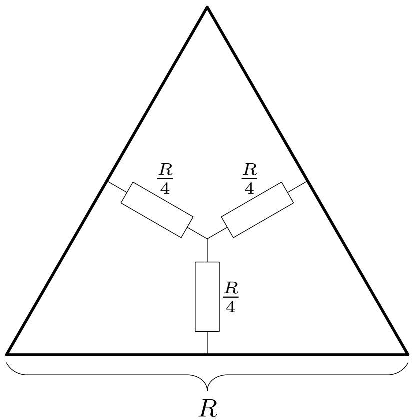


Matěje pořád baví hrátky s jeho fraktálem o rozměru $l = 10\,\mathrm{cm}$. Našel si multimetr a zapojil ho mezi dva vrcholy. Odpor jednoho metru drátu je $1\,000{,}000\,\Omega$. Jaký odpor Matěj naměřil?

Matěj má opravdu hodně moc rád nekonečně nekonečná nekonečna.

Odpor, který Matěj naměřil, označíme R. Při řešení využijeme faktu, že odpor drátu je přímo úměrný jeho délce, a tedy když v libovolném objektu sestaveném z odporového drátu zkrátíme všechny dílčí drátky na polovinu, odpor mezi libovolnými dvěma body se také zmenší na polovinu.

Když z Matějova fraktálu odebereme tři vnější strany, dostaneme stejný fraktál, jen dvakrát zmenšený. O něm můžeme říct, že odpor mezi jeho dvěma vrcholy je $R/2$. Vnitřní fraktál tak můžeme nahradit zapojením tří odporů o velikosti $R/4$ do hvězdy tak, jak je zobrazeno na obrázku 1.



Obr. 1: Schéma náhradního zapojení

To už je jednoduše řešitelná soustava odporů (dokonce i symetrická, proto můžeme svislý drát hvězdy zahodit). Odpor vnější strany je λl. Celkový odpor mezi vrcholy tak bude

$$R = \frac{\lambda l \left(2\frac{\lambda l}{2} + \frac{4\frac{R}{4}\frac{\lambda l}{2}}{2\frac{R}{4} + 2\frac{\lambda l}{2}} \right)}{\lambda l + 2\frac{\lambda l}{2} + \frac{4\frac{R}{4}\frac{\lambda l}{2}}{2\frac{R}{4} + 2\frac{\lambda l}{2}}}$$

Po několika algebraických úpravách dostáváme kvadratickou rovnici

$$3R^2 + 2\lambda l R - 2\lambda^2 l^2 = 0\,,$$

jejíž řešením pro R je (zajímá nás pouze kladné řešení, záporný odpor nemá fyzikální význam)

$$R = \frac{-1+\sqrt{7}}{3}\lambda l \doteq 54{,}858\,4\,\Omega\,.$$

Alternativní řešení vychází z toho, že ze symetrie bude na svislé ose trojúhelníka stejné napětí, můžeme tedy celou tuto osu nahradit jedním uzlem S. Pak pro odpor $R/2$ mezi vrcholem fraktálu a uzlem S přímo dostáváme

$$\frac{2}{R} = \frac{2}{\lambda l} + \frac{1}{\frac{\lambda l}{2} + \frac{1}{\frac{2}{\lambda l} + \frac{4}{R}}}\,,$$

protože odpor mezi vrcholem vnitřního fraktálu a uzlem S bude $R/4$. To vede na stejnou kvadratickou rovnici a stejný výsledek.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: http://fykos.cz
e-mail: fykos@fykos.cz

FYKOS je také na Facebooku
http://www.facebook.com/FYKOS

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.