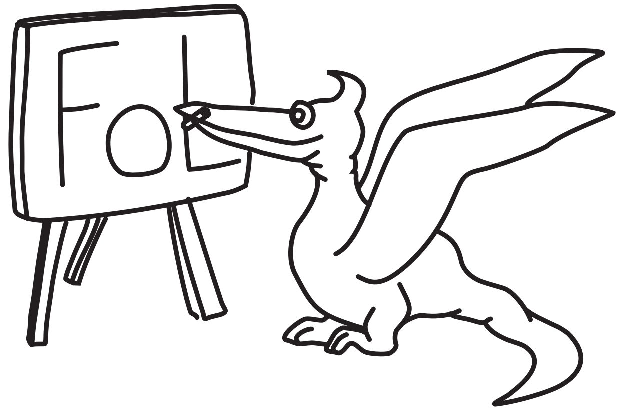
Řešení úloh 7. ročníku Fyziklání online



Úloha FoL.1 ... těžký běh

Jakou rychlostí musíte na rovníku běžet, abyste vážili co nejvíce (měli největší tíhu), pokud si zvolíte správný směr? Neuvažujte relativitu. *Matěj uvažoval nad tím, jak zdravě ztloustnout.*

Poběžíme proti směru zemské rotace, tedy na západ, takovou rychlostí, aby na nás nepůsobila odstředivá síla. Naše rychlost tedy bude opačná, než je rychlost otáčení Země.

$$v = \omega R = \frac{2\pi R}{T} \doteq 464\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,,$$

kde $T = 24\,\mathrm{h}$ a $R = 6\,380\,\mathrm{km}$.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha FoL.2 ... elektrogong

*Mirkův kolega si na bleším trhu koupil za \$1 přístroj na „small science“. Jedná se o krabičku se dvěma drátky, jejichž konce jsou od sebe ve vzdálenosti l. Na drátky je připojen elektrický zdroj. Pokud je dostatečně silný, začne mezi drátky téct proud – dojde k elektrickému výboji. Pomocí tohoto výboje svolává pan kolega na oběd celé své výzkumné oddělení. Jak blízko k sobě musí přiložit konce drátků, aby vyvolal elektrický výboj, jestliže přístroj zapojí do elektrické sítě se špičkovým napětím $325\,\mathrm{V}$? Dielektrická pevnost vzduchu je $D = 3\,\mathrm{MV\cdot m^{-1}}$. Výsledek uveďte v **mikrometrech**.* *Mirek se těšil na oběd.*

Maximální napětí v obvodu je $U = 325\,\mathrm{V}$, maximální vzdálenost drátků umožňující tvorbu výboje je proto

$$l = \frac{U}{D} \doteq 110\,\mathrm{\mu m}\,.$$

Poznamenejme, že ve skutečnosti je vzdálenost podstatně větší díky vlhkosti, prachu, tvaru elektrod a dalším vlivům. Pro účely úlohy také byla zamlčena Teslova cívka uvnitř krabičky.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.3 ... skok

Průměrný člověk má hmotnost $80\,\mathrm{kg}$. Kolik lidí by se muselo sejít na jednom místě a současně vyskočit do výšky $1\,\mathrm{m}$, aby se v ten moment střed Země posunul o $0{,}1\,\mathrm{pm}$?
Matěj skákal na trampolíně.

Společné těžiště lidí a Země se neposune. V momentě, kdy jsou všichni lidé $1\,\mathrm{m}$ nad zemí, se střed Země má posunout o $0{,}1\,\mathrm{pm}$.

$$N \cdot 1\,\mathrm{m} \cdot 80\,\mathrm{kg} \doteq 0{,}1\,\mathrm{pm} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}\,,$$

kde jsme zároveň využili aproximace $1\,\mathrm{m} - 0{,}1\,\mathrm{pm} \approx 1\,\mathrm{m}$.

$$N \doteq \frac{0{,}1\,\mathrm{pm} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{1\,\mathrm{m} \cdot 80\,\mathrm{kg}} \doteq 7{,}5 \cdot 10^{9}$$

To znamená, že by se musela smluvit celá pozemská populace.

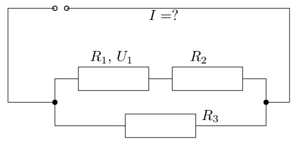
Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha FoL.4 ... teče nám tu proud

Jaký poteče celkový elektrický proud I v obvodu dle uvedeného schématu? Hodnoty odporů rezistorů jsou $R_1 = 124\,\Omega$, $R_2 = 263\,\Omega$ a $R_3 = 454\,\Omega$. Napětí na prvním rezistoru je $U_1 = 14{,}8\,\mathrm{V}$.

Výsledek udejte v miliampérech.

Karel chtěl, aby si účastníci zopakovali obvody.



Nejprve označme napětí na každém z rezistorů jako U_x a proud na každém z rezistorů jako I_x. Z Ohmova zákona pro první rezistor můžeme zjistit, že

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1}\,.$$

Díky zákonu zachování náboje (resp. 1. Kirchhoffovu zákonu) můžeme tvrdit, že $I_1 = I_2$. Díky této rovnosti můžeme vypočítat napětí na druhém rezistoru jako

$$U_2 = R_2 I_2 = R_2 I_1 = \frac{R_2}{R_1} U_1\,.$$

Celkové napětí horní větve musí být z 2. Kichhoffova zákona rovno celkovému napětí spodní větve. Odtud dostaneme rovnost

$$U = U_3 = U_1 + U_2 = U_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\,.$$

Nyní už máme všechny pomocné výpočty hotové a můžeme vyjádřit celkový proud

$$I = I_1 + I_3 = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_1\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}{R_3} = U_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{R_2}{R_1 R_3}\right)\,.$$

Po číselném dosazení zjistíme, že $I \doteq 221\,\mathrm{mA}$.

Kateřina Smítalová
katka@fykos.cz

Úloha FoL.5 ... zrcadlový problém

V místnosti, která je $10\,\mathrm{m}$ široká a $5\,\mathrm{m}$ dlouhá, je uprostřed jedné z delších stěn ve výšce očí vsazené zrcadlo široké $1\,\mathrm{m}$. Přímo proti středu zrcadla stojí Mikuláš ve vzdálenosti $1\,\mathrm{m}$ od zrcadla. Jakou část plochy pokoje v % Mikuláš vidí v zrcadle? Předpokládejte, že si ve výhledu nestíní. Pozn.: plochu počítejte jako vodorovný řez pokojem ve výšce Mikulášových očí.

Katka se na přednášce dívala z okna.

Z geometrie úlohy je jasné, že nás nejvíce zajímají dva paprsky, které se odrážejí od okraje zrcadla. Označme v kolmou vzdálenost Mikuláše od zrcadla a z polovinu délky zrcadla. Díky zákonu odrazu můžeme tvrdit, že

$$\frac{v}{z} = \frac{y}{x}\,,$$

kde y je délka pokoje a x kolmá vzdálenost mezi místem dopadu paprsku na zrcadlo a s jeho průsečíkem s přímkou vedenou zadní stěnou pokoje. v našem případě $x = 2{,}5\,\mathrm{m}$. Z geometrie zjistíme, že paprsek skončí na zadní stěně pokoje a oddělí nám tak viditelnou a neviditelnou část pokoje. Po sečtení všech viditelných kousků máme plochu S

$$S = 2zy + \frac{1}{2}2xy = zy\left(2 + \frac{y}{v}\right) ,$$

číselně $S = 17{,}5\,\mathrm{m}^2$. Celkovou plochu pokoje vypočítáme prostým vynásobením délek jeho stran, číselně $S_\mathrm{p} = 50\,\mathrm{m}^2$. Podíl viditelné části pokoje už nyní získáme jednoduše jako podíl

$$p = \frac{S}{S_p} .$$

Vidíme, že výsledek je $p = 35\,\%$.

Kateřina Smítalová
katka@fykos.cz

Úloha FoL.6 ... přechlazená voda

Máme nádobu s přechlazenou vodou o teplotě $t = -8\,^\circ\mathrm{C}$. V nádobě nejsou zatím žádná kondenzační jádra, a proto je stále kapalná. Jaká část vody (odpověď udejte v %) ztuhne, když se do vody dostane kondenzační jádro? Zanedbejte tepelnou kapacitu nádoby. Měrná tepelná kapacita kapalné vody je $c = 4\,180\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$, měrné skupenské teplo tání je $l = 334\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}$.

Pamatujte, že tato úloha je jednoduchá.

Karel byl na přednášce doc. Bochníčka, který povídal o přechlazené vodě.

Rozeberme si úlohu z tepelného hlediska. Jakmile vložíme do kapaliny kondenzační jádro, začne se přechlazená voda měnit v led a při tomto ději bude uvolňovat teplo. Toto teplo bude přijímat celý objem vody a bude se tak ohřívat. Ohřev může probíhat pouze o 8 stupňů do teploty $0\,^\circ\mathrm{C}$. Dále by totiž led začal znovu roztávat. Tuto tepelnou rovnici můžeme zapsat ve tvaru $kml = mc\Delta t$, kde m je hmotnost vody (může být zkrácena), k je podíl vody, která se změní v led, c je tepelná kapacita vody a l je skupenské teplo tání ledu. Levá strana této rovnice vyjadřuje teplo vydané tou částí vody, která se přemění na led. Pravá strana zase naopak vyjadřuje teplo přijaté celým objemem vody, které je potřebné pro ohřev na bod tání. Vyjádřením získáme

$$k = \frac{c\Delta t}{l} .$$

Číselným dosazením dostaneme $k = 10\,\%$.

Kateřina Smítalová
katka@fykos.cz

Úloha FoL.7 ... ekologická

Představte si, že by se elektřina vyráběla pouze ze dřeva. Kolik listů papíru můžeme vyrobit z takového množství dřeva, které je nutné spálit, abychom mohli používat tablet jednu hodinu? Výhřevnost dřeva je $13\,\mathrm{MJ{\cdot}kg^{-1}}$. V průběhu výroby, přenosu a uchování elektrické energie se $80\,\%$ energie ze dřeva ztratí. Tablet má během používání napětí na svorkách baterie $3{,}6\,\mathrm{V}$ a odběr $0{,}5\,\mathrm{A}$. Jeden list formátu A4 váží $5{,}0\,\mathrm{g}$ a na jeho výrobu se spotřebuje dvojnásobné množství dřeva.

Erik šetří lesy.

Jeden list papíru má hmotnost m, a tedy na jeho výrobu je potřeba $2m$ dřeva. Výhřevnost dřeva je H. Tepelnou energii dokážeme převést na elektrickou s účinností $\eta = 0{,}2$. Celkem tak získáme $2mH\eta$ elektrické energie.

Tablet odebírá proud I s napětím U po čas t. Celkem tak spotřebuje UIt elektrické energie. Pro hledaný počet listů papíru n platí

$$n = \frac{UIt}{2mH\eta} \doteq 0{,}25\,.$$

Lze tedy říci, že tablet spotřebuje za hodinu čtvrt listu papíru.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FoL.8 ... další způsob určení rychlosti diabolky

Máme vzduchovou pušku o hmotnosti $M_\mathrm{p} = 5\,\mathrm{kg}$, ze které budeme střílet náboje (diabolky) o hmotnosti $m = 0{,}502\,\mathrm{g}$. Neznáme ovšem rychlost výstřelu diabolky. Zdá se, že by pro nás bylo těžké měřit zpětný ráz, proto si zkusíme pomoci jinak. Vystřelíme do dřevěného kvádříku o hmotnosti $M = 182\,\mathrm{g}$, který naše střela rozpohybuje, ale kvádřík se kvůli tření zastaví na dráze $s = 4{,}8\,\mathrm{cm}$. Součinitel smykového tření mezi kvádříkem a podložkou je $f = 0{,}3$. Určete rychlost diabolky.

Střílíme tak, že při vstupu do kvádříku má střela prakticky ústťovou rychlost, ale přitom neovlivňujeme pohyb kvádříku plyny, které se ze vzduchové pušky uvolňují. Kvádřík leží na vodorovné podložce. *Karel převzal z článku Fyzika jako zážitek.*

Hmotnost pušky můžeme zahodit. V zadání jsme se navíc explicitně dozvěděli, že ze zpětného rázu určovat rychlost nebudeme. Ostatní parametry ale už budeme pro náš odhad považovat za relevantní. Vyjdeme nejprve z toho, že jde o dokonale nepružnou srážku diabolky s kvádříkem. To znamená, že se sice nebude zachovávat energie, ale zachová se hybnost a oba předměty se spojí a po srážce se budou pohybovat stejnou rychlostí w. Označme si ústťovou rychlost diabolky jako v. Pak platí

$$mv = (m + M)\,w \quad \Rightarrow \quad v = \frac{m + M}{m} w\,.$$

Neznáme ovšem počáteční rychlost kvádříku w, kterou se začne pohybovat společně s diabolkou po zásahu. Víme ale, že díky tření se bude kvádřík pohybovat se zrychlením $a = fg$, kde g je tíhové zrychlení, dokud se nezastaví. Vzorec pro dráhu zrychleného pohybu je známé $s = at^2/2$ a pro rychlost $w = at$. Vyloučením času dostáváme

$$s = \frac{1}{2}\frac{w^2}{fg} \quad \Rightarrow \quad w = \sqrt{2fgs}\,.$$

Dohromady pak dostáváme ústťovou rychlost ze vztahu

$$v = \frac{m + M}{m}\sqrt{2fgs} \doteq 193\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Ústťová rychlost naší diabolky je tedy $193\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Mohli jsme případně zanedbat hmotnost diabolky ve chvíli, kdy zvětšovala hmotnost kvádříku po srážce. Přestože byl pojmenovaný zdrobněle, s přesností na tři platné cifry bychom dostali stejný výsledek. Ale nesmíme hmotnost náboje zanedbat před srážkou (logicky by pak měl i nulovou hybnost).

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha FoL.9 ... zrychlování dopravy

Karel jel jednou takhle metrem a uviděl ceduli informující cestující, že výkon tramvají se za desítky let zdesetinásobil. Kolikrát vyšší maximální rychlostí mohou tramvaje nyní jezdit, pokud bychom uvažovali, že jejich hmotnost se zatížením je stejná a že odporové síly jsou uměrné druhé mocnině rychlosti tramvaje? Ptáme se tedy na $k = v_1/v_0$, kde v_0 je původní maximální rychlost a v_1 nová maximální rychlost. Tramvaje jsou urychlované pouze motorem a zpomalované pouze zmíněnou odporovou silou. *Karel jel metrem a viděl ceduli opěvující tramvaje.*

Musíme si uvědomit, co platí pro okamžitý výkon P. Ten si můžeme vyjádřit jako součin síly F, kterou motor působí na tramvaj, a rychlosti v, kterou tramvaj jede. Celkově tedy máme $P = Fv$. Při maximální rychlosti uvažujeme, že už je rychlost konstantní, a proto je konstantní i odporová síla. Odporovou sílu můžeme zapsat jako $F = Cv^2$, kde C je nějaká konstanta, která odpovídá parametrům tramvaje. Odporová síla se pak právě vyrovnává s výkonem tramvaje. Díky tomu můžeme zapsat výkon ve tvaru $P = Cv^3$. Víme, že poměr původního výkonu P_0 a konečného výkonu P_1 je $P_1/P_0 = 10$. Můžeme tedy počítat poměr rychlostí

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{Cv_1^3}{Cv_0^3} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{v_1}{v_0} = \sqrt[3]{\frac{P_1}{P_0}} = \sqrt[3]{10} \doteq 2{,}15\,.$$

Tramvaje tedy nyní mohou jezdit v Praze zhruba 2,15krát rychleji.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha FoL.10 ... blíž než se zdá

Na pozemských observatořích byla paralaxa hvězdy Proxima Centauri stanovena jako $p = 0{,}77\,\mathrm{arcsec}$. Kolem této hvězdy obíhá planeta ve vzdálenosti $r = 0{,}05\,\mathrm{au}$ (uvažujeme přibližně kruhovou orbitu). Představme si, že na této planetě žijí inteligentní bytosti (říkejme jim třeba kentauři), které změřily paralaxu našeho Slunce. Kentauří definice paralaxy je ovšem založena na oběžné dráze jejich domovské planety. Jak velkou paralaxu naměří? Výsledek uveďte v ***úhlových vteřinách****.* *Mirek přemýšlel nad jednotkami v mimozemské fyzice.*

Hvězdná paralaxa je (zjednodušeně) definována následovně: Sestrojme pomyslný trojúhelník Země, Slunce a pozorovaný objekt. Úhel u vrcholu, který je představován pozorovaným objektem, se nazývá paralaxa. Jelikož se vždy jedná o velmi malý úhel, používáme aproximaci malých úhlů, která se často nazývá paraxiální. Jestliže poloměr oběžné dráhy exoplanety představuje pět setin poloměru oběžné dráhy Země, bude paralaxa změřená kentaury zmenšená ve stejném poměru, tedy $p' = 0{,}77\,\mathrm{arcsec}/20 = 0{,}0385\,\mathrm{arcsec}$.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha FoL.11 ... limonádová

Kolikrát by se zvětšil objem bublinkové limonády, kdyby se všechen rozpuštěný oxid uhličitý přeměnil najednou na plyn? Klasická kolová limonáda obsahuje $8\,\mathrm{g\cdot dm^{-3}}$ *oxidu uhličitého. Počítejte s podmínkami* $25\,\mathrm{^\circ C}$, $101{,}3\,\mathrm{kPa}$. *Štěpán se polil.*

Počet molů oxidu uhličitého obsaženého v limonádě spočteme jako

$$n = \frac{m}{M}\,,$$

kde m je jeho hmotnost a M molární hmotnost. Pro ideální plyn lze vyjádřit také

$$n = \frac{V}{V_0}\,,$$

kde V je objem plynu a V_0 je jeho molární objem při zadaných podmínkách. Ze stavové rovnice ideálního plynu spočítáme, že $V_0 = RT/p = 24{,}5\,\mathrm{dm^3}$. Odtud můžeme spočítat objem oxidu uhličitého v limonádě jako

$$V = \frac{V_0 m}{M}\,.$$

Pro zadání vychází $V = 4{,}45\,\mathrm{dm^3}$. Nesmíme ale zapomenout na kapalnou složku limonády, která má jeden litr. Celkově jsme tedy z jednoho litru dostali $5{,}45\,\mathrm{dm^3}$. Objem se tedy zvětšil 5,45 krát. To, že rozpuštěný CO_2 měl nějaký objem, můžeme zanedbat.

Štěpán Stenchlák
`stenchlak@fykos.cz`

Úloha FoL.12 ... nepadej

Dvoukolové vozítko segway udržuje svislou polohu zrychlováním případně zpomalováním. Zanedbejte hmotnost vozítka a jezdce nahraďte hmotným bodem o hmotnosti $65\,\mathrm{kg}$ *ve vzdálenosti* $\frac{r}{2} = 1\,\mathrm{m}$ *od osy otáčení. Jaký výkon musí být motor schopen dodat, má-li segway vyrovnat náklon dopředu o* $\alpha = 10^\circ$ *při rychlosti* $v = 10\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$*? Použijte* $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.
Michal se podivoval značkám.

Představme si vozítko s jezdcem jako tyč délky r, která je od svislé roviny nakloněná o úhel α. Tato soustava se pohybuje neinerciálně (vozítko zatáčí, zrychluje, zpomaluje). Proto v této soustavě působí setrvačná síla F_1, která působí v těžišti (ve vzdálenosti $\frac{r}{2}$ od osy otáčení). Tíhová síla F_2, která na jezdce působí, vyvolává v tomto případě v ose otáčení moment síly

$$M_2 = F_2 \frac{r}{2} \sin\alpha = mg\frac{r}{2}\sin\alpha\,.$$

Protože jezdec zůstává při jízdě stále stejně nakloněný, musí platit rovnost momentů sil, tedy (vztahujeme k ose otáčení)

$$F_1 \cos\alpha \frac{r}{2} = mg\frac{r}{2}\sin\alpha\,.$$

Po zkrácení ramene síly dostáváme, že

$$F_1 = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha\,.$$

Nyní z pohledu inerciální soustavy pozorovatele jezdce na vozítku můžeme najít původ setrvačné síly v síle motoru. Tato síla samozřejmě působí i v neinerciální soustavě spojené s jezdcem, protože však působí v ose otáčení, nevyvolává žádný moment. Když známe sílu motoru, je jednoduché dopočítat výkon ze známého vzorečku

$$P = F_1 v = mvg \operatorname{tg} \alpha \,.$$

Číselným dosazením zjistíme, že $P \doteq 312\,\mathrm{W}$.

Kateřina Smítalová
katka@fykos.cz

Úloha FoL.13 ... sestřel ho!

Jaká je pravděpodobnost (v procentech), že při bliknutí laserem svisle vzhůru zasáhne jeho paprsek dopravní letadlo? Průměrná plocha horizontálního řezu letadlem je $S = 300\,\mathrm{m^2}$ a v každém okamžiku se ve vzduchu nachází přibližně deset tisíc letadel. Předpokládejte rovnoměrné rozložení letadel na obloze. Letadla létají v malé výšce v porovnání s poloměrem Země.

Matěj uvažoval o teroristickém útoku.

Pravděpodobnost spočítáme jako poměr celkové plochy letadel a povrchu Země.

$$p = \frac{10\,000 S}{4\pi R^2} = 5{,}9 \cdot 10^{-9} \,.$$

Pravděpodobnost, že laser zasáhne letadlo, je tedy $5{,}9 \cdot 10^{-7}\,\%$.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha FoL.14 ... Youngovo tepelné napětí

Máme měděnou tyčku délky $l = 12{,}3\,\mathrm{cm}$ s průřezem $S = 1{,}02\,\mathrm{cm^2}$. Konce této tyčky upevníme do držáku, který nepovoluje podélné tepelné rozpínání. Měděná tyčka má koeficient teplotní délkové roztažnosti $\alpha = 1{,}70 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K^{-1}}$ a Youngův modul pružnosti v tlaku $E = 117\,\mathrm{GPa}$. Jakou silou bude tyčka působit na ramena držáku, pokud se teplota tyčky zvýší o $\Delta T = 15{,}0\,\mathrm{K}$? Do výsledku zadávejte velikost síly působící na jednom z konců tyčky.

Karel kombinoval vzorečky.

Úloha má celkem jednoduchou myšlenku. Tyčka by se vlivem zahřívání měla prodlužovat. Protože je ale uchycena rameny držáku se stálými rozměry, bude se zároveň deformovat přesně tak, aby její délkový rozměr zůstával konstantní. Sílu F můžeme spočítat pomocí vzorečku $F = S\sigma$, kde σ je mechanické napětí tyčky a S je plocha, kterou tlačí tyčka do místa upevnění. Dle zadání je to její kolmý průřez. Dále podle definičního vztahu Youngova modulu pružnosti v tlaku můžeme psát $F = SE\varepsilon$, kde E je Youngův modul pružnosti v tlaku a ε je relativní prodloužení (resp. v tomto případě zkrácení) tyčky. Ze vzorce pro délkovou teplotní roztažnost můžeme psát

$$\varepsilon \approx \frac{\Delta l}{l} = \frac{(1 + \alpha \Delta T) l - l}{l} = \alpha \Delta T \,,$$

kde Δl je absolutní zkrácení tyčky. Vyjádření síly tedy přejde na

$$F = SE\alpha\Delta T \,.$$

Číselným dosazením získáme $F = 3{,}04\,\mathrm{kN}$. Tepelná změna průřezu tyčky je v tomto případě zanedbatelná.

Kateřina Smítalová
katka@fykos.cz

Úloha FoL.15 ... gumičky

Mějme dva proužky gumy se stejným koeficientem tuhosti k, které mají stejnou klidovou délku. Jedna gumička praskne, jestliže na ni působíme silou větší než F_1. Druhá gumička praskne, jestliže na ni působíme silou větší než cF_1, kde $c > 1$ je určitá konstanta. Vezmeme závaží a zavěsíme ho na obě gumičky zároveň (paralelně) tak, aby gumičky nepraskly. Následně pomalu spojitě zvyšujeme hmotnost tohoto závaží (tak aby závaží nekmitalo) až do chvíle, kdy první gumička praskne. Jakou minimální hodnotu musí mít konstanta c, aby následně druhá gumička nepraskla? *Michal střílel po lidech gumičkami.*

Podle zadání první gumička praskne, jestliže na ni působíme silou F_1. Z tohoto vyplývá, že závaží musí ve chvíli prasknutí první gumičky dohromady působit tíhovou silou $2F_1$. V tuto chvíli první gumička praskne a závaží už nyní bude viset jen na druhé gumičce, která ale nebude v rovnovážné poloze.

Na vzniklou situaci se můžeme nyní dívat jako na harmonický oscilátor, který se nachází v maximální výchylce směrem nahoru. Rovnovážná poloha tohoto oscilátoru je v určité výšce Δh pod současnou polohou závaží. Jak je známo, maximální výchylka tohoto závaží směrem dolů se nachází ve výšce Δh pod rovnovážnou polohou. Právě do této polohy se závaží bude snažit po prasknutí první gumičky dostat a následně bude mezi těmito dvěma polohami kmitat.

Jelikož síla působící na gumičku je závislá pouze na protažení gumičky, bude maximální síla působit na druhou gumičku právě ve chvíli, kdy se závaží bude nacházet v maximální výchylce směrem dolů. Navíc víme, že ve chvíli prasknutí první gumičky na druhou gumičku působí síla F_1 a v rovnovážné poloze na druhou gumičku působí síla $2F_1$. Můžeme tedy snadno odvodit, že při maximální výchylce směrem dolů by na druhou gumičku působila síla $3F_1$. Podle dřívějších úvah víme, že toto je maximální síla, která bude na druhou gumičku v průběhu kmitání působit.

Druhá gumička tedy musí vydržet působení síly alespoň $3F_1$. Je tedy vidět, že pro konstantu c musí platit $c > 3$.

Michal Nožička
nozicka@fykos.cz

Úloha FoL.16 ... bungee jumping

Mějme most vysoký $h = 50\,\mathrm{m}$ a lano na bungee jumping, které je v klidové poloze dlouhé $l = 10\,\mathrm{m}$ a které má koeficient tuhosti $k = 80\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. Člověk o hmotnosti m se přiváže tímto lanem k mostu a skočí (uvažujme nulovou počáteční rychlost). Jakou maximální hmotnost m může tento člověk mít, aby ho lano stačilo zastavit před dopadem na zem?
Michal se bojí jít na bungee jumping.

Nejprve si odvoďme vztah, který musí platit pro výšku, ve které lano skokana zabrzdí. Ve výšce, kde bude skokan zastaven, bude platit, že potenciální energie pružnosti nataženého lana se bude rovnat změně potenciální energie skokana. Uvažujme tedy, že lano skokana zastaví ve výšce v (měřeno od vrcholu mostu dolů). Potom bude platit vztah

$$\frac{1}{2}k(v-10\,\mathrm{m})^2 = mgv\,,$$

kde k je tuhost lana, g je gravitační zrychlení a m je hmotnost skokana. Člen $(v-10\,\mathrm{m})$ na levé straně rovnice má tento tvar, protože lano má v klidovém stavu délku 10 m a teprve potom se začne natahovat.

V této rovnici máme 2 neznámé: výšku v, ve které je skokan zastaven, a hmotnost skokana m. Můžeme si tedy jednu z těchto dvou neznámých určit a hodnotu druhé dopočítat z této rovnice. Jelikož nás zajímá mezní hmotnost skokana, budeme uvažovat případ, kdy bude skokan lanem zastaven přesně v úrovni země, tedy ve výšce $v = 50\,\mathrm{m}$. Nyní už můžeme všechny tyto hodnoty dosadit do naší rovnice a vyjádřit si mezní hmotnost skokana jako

$$m = \frac{\frac{1}{2}k(v-10\,\mathrm{m})^2}{gv} \doteq 130{,}48\,\mathrm{kg}\,.$$

Z logiky věci je zřejmé, že skokan s větší hmotností nebude lanem zastaven včas.

Aby lano stačilo skokana zastavit před pádem na zem, nesmí mít skokan větší hmotnost než $m = 130{,}48\,\mathrm{kg}$.

Michal Nožička
nozicka@fykos.cz

Úloha FoL.17 ... fidget spinner

Spinner se točí úhlovou rychlostí $\omega = 12{,}34\,\mathrm{s}^{-1}$. Poměr průměrů vnitřní a vnější strany ložiska je $k = 0{,}432$. Jak dlouho trvá, než jedna kulička v ložisku vykoná jeden celý oběh (kolem statické vnitřní části ložiska)? Předpokládejte, že kuličky v ložisku neprokluzují.

Matěj si koupil autistickou hračku.

Označme vnitřní poloměr ložiska r a jeho vnější poloměr R. Platí $k = r/R$. Bod kuličky, který se dotýká vnější části ložiska, se spolu s ní pohybuje okamžitou rychlostí $v = \omega R$. Bod kuličky dotýkající se vnitřní části se pohybuje nulovou rychlostí, protože vnitřní část je statická. Střed kuličky se pohybuje průměrem těchto rychlostí, a sice $v/2$. Vzdálenost středu ložiska a středu kuličky je $(r+R)/2$. Střed kuličky tak obíhá s úhlovou rychlostí

$$\omega_k = \frac{v}{r+R} = \frac{\omega R}{r+R}\,.$$

Perioda oběhu kuličky je tedy

$$T = \frac{2\pi}{\omega_k} = \frac{2\pi\,(r+R)}{\omega R} = \frac{2\pi}{\omega}\,(k+1)\ .$$

Číselným dosazením dostaneme $T \doteq 0{,}729\,\mathrm{s}$.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha FoL.18 ... mrtvolka v jantaru

Jantar je průhledná žlutohnědá zkamenělá slída, ve které se mohou nacházet fosílie. Index lomu jantaru je $n = 1{,}55$. V jednom takovém kousku se nachází brouček, který byl zalit kdysi dávno pryskyřicí. Pokud se díváme kolmo na povrch jantaru, zdá se nám, že brouček je $2{,}25\,\mathrm{cm}$ pod povrchem. Jantar držíme poměrně daleko od hlavy. V jaké hloubce (v centimetrech) se skutečně nachází? *Karel převzal zadání z Cutnell and Johnson: Physics 9e.*

Brouček se nachází ve vzdálenosti a pod povrchem jantaru, ale nám se zdá že je to vzdálenost b. Při pozorování broučka jsou naše oči ve vzdálenosti y od povrchu jantaru. Představme si kolmici na povrch jantaru, procházející středem broučka. Protože se na povrch jantaru díváme kolmo, daná kolmice bude procházet středem spojnice našich očí. Jedno z nich tak bude ve vzdálenosti x nalevo od kolmice, druhé ve stejné vzdálenosti napravo od kolmice.

Paprsek putující od broučka projde povrchem jantaru ve vzdálenosti d od kolmice, zlomí se a následně dopadne až do našeho oka. Pokud úhel dopadu označíme α a úhel lomu označíme β, dostáváme soustavu rovnic

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{d}{a}\,,$$
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{x-d}{y} = \frac{d}{b}\,,$$

kde jsme poslední výraz dostali z podobnosti trojúhelníků, neboť broučka vidíme ve směru už zlomeného paprsku. Jeho prodloužením do jantaru dostaneme v místě průniku s osou bod ve vzdálenosti b od povrchu.

Ze Snellova zákona vyplývá

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_0}{n}\,,$$

kde n_0 je index lomu vzduchu.

Protože platí $x \ll y$, úhly α a β se blíží nule. Díky tomu můžeme využít aproximaci $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$. Ve Snellově zákoně upravíme funkce sin na funkce tg a rovnou za ně dosadíme z prvních dvou rovnic. Dostáváme výraz

$$\frac{\frac{d}{b}}{\frac{d}{a}} = \frac{n_0}{n}\,,$$

ze kterého se jednoduchými úpravami dostaneme k výslednému vztahu

$$a = b\frac{n}{n_0}\,,$$

tedy $a \doteq 3{,}49\,\mathrm{cm}$.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FoL.19 ... rozmáchnutá tyč

Máme nehmotnou tuhou tyč délky $l = 1{,}2\,\mathrm{m}$, která je na jednom konci upevněná a může se okolo tohoto bodu otáčet. K této tyči jsou připevněny tři malé koule o stejné hmotnosti, které můžete považovat za hmotné body. Jsou rozmístěny tak, že jedna z koulí je připevněna na *opačném konci tyče než její upevnění. Zbylé jsou připevněny v 1/3 a ve 2/3 její délky. Tyč je nejprve v klidu držená ve vodorovné poloze. V nějakém okamžiku ji pustíme. S jakou rychlostí se bude pohybovat její volný konec při průchodu rovnovážnou polohou (tedy nejnižším bodem)? Tíhové zrychlení je $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.* *Karel učil mechaniku.*

Moment setrvačnosti hmotného bodu o hmotnosti m vzhledem k ose ve vzdálenosti d je $J = md^2$. Pokud hmotnosti koulí označíme m, pro moment setrvačnosti soustavy vzhledem k upevněnému konci tyče dostáváme

$$J = m\left(\frac{l}{3}\right)^2 + m\left(\frac{2}{3}\right)^2 + ml^2 = \frac{14}{9}ml^2\,.$$

Při pohybu tyče z vodorovné do svislé polohy se uvolní potenciální energie o velikosti

$$E = mg\frac{l}{3} + mg\frac{2}{3} + mgl = 2mgl\,.$$

Ze zákona zachování energie vyplývá, že se všechna tato energie přemění na kinetickou energii tyče, pro kterou platí

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}J\frac{v^2}{l^2}\,.$$

Dosazením za E_k a J dostáváme rovnici

$$2mgl = \frac{1}{2}\frac{14}{9}ml^2\frac{v^2}{l^2}\,,$$

ze které už můžeme jednoduchými úpravami vyjádřit v

$$v = \sqrt{\frac{18}{7}gl} \doteq 5{,}50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Konec tyče se tedy bude pohybovat rychlostí $5{,}50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FoL.20 ... vychýlená

Mějme kyvadlo sestavené z tenké, tuhé tyčky (závěsu) a těžkého závaží. Závěs připevníme na další, vodorovnou tyč, která představuje osu, kolem níž kyvadlo kmitá. Nechť lze kmitání dobře aproximovat modelem matematického kyvadla. Vodorovnou tyč vychýlíme tak, aby se odkláněla od vodorovného směru o úhel $\varphi = 30^\circ$. Vychýlené kyvadlo necháme konat malé kmity, periodu kmitů označíme T'. Periodu malých kmitů pro nevychýlený případ označíme T. Nalezněte poměr T'/T. *Mirek se díval na seriál Génius Einstein.*

Označme tíhové zrychlení g. Pohyb vychýleného kyvadla je vázaný do roviny vychýlené od svislého směru o φ. Průmět tíhového zrychlení do této roviny je $g_\parallel = g\cos\varphi$. Kolmá složka $g_\perp = g\sin\varphi$ je kompenzována silou uvnitř závěsu (jelikož máme použít aproximaci matematického kyvadla, neuvažujeme tření v závěsu).

Pro periodu malých kmitů matematického kyvadla platí úměra

$$T \sim g^{-1/2}\,,$$

pro vychýlené kyvadlo potom

$$T' \sim g_{\parallel}^{-1/2}\,.$$

Hledaný poměr period je tedy

$$\frac{T'}{T} = \left(\frac{g\cos\varphi}{g}\right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{1}{\cos\varphi}}\,.$$

Číselný výsledek je 1,075.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha FoL.21 ... prak-tická

Mějme ruční prak, pro jehož výrobu jsme použili nehmotnou gumičku, která má délku přesně rovnu vzdálenosti úchytů $l_0 = 15\,\mathrm{cm}$. Na střed gumičky přiložíme kamínek o hmotnosti $m = 5\,\mathrm{g}$ a napneme jím gumičku ve vodorovné rovině tak, že vytvoří ramena rovnoramenného trojúhelníku o výšce $h_0 = 8\,\mathrm{cm}$. Kamínek poté uvolníme. Jaké rychlosti kamínek při výstřelu dosáhne? Tuhost gumičky je $k = 50\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-2}}$. *Mirek si chtěl ze soutěžících vystřelit.*

Před natažením praku je potenciální energie gumičky E_{p0} nulová (a i kdyby byla gumička předpjatá, mohli bychom stále tuto energii položit rovnu nule). Po natažení se délka gumičky změní z l_0 na

$$l = 2\sqrt{h_0^2 + (l_0/2)^2}\,.$$

Potenciální energie gumičky po natažení je

$$E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 = \frac{1}{2}k(2\sqrt{h_0^2 + (l_0/2)^2} - l_0)^2$$

a při výstřelu se přemění v kinetickou energii kamínku

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = E_p\,.$$

Rychlost kamínku při výstřelu nyní vyjádříme ve tvaru

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}(2\sqrt{h_0^2 + (l_0/2)^2} - l_0)\,,$$

po dosazení $v \doteq 6{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha FoL.22 ... energetičnosti otáčení

Mějme dva stejné homogenní válce, které se otáčejí stejnou úhlovou rychlostí ω. Válec, který označíme jako A, se otáčí kolem svojí hlavní osy. Válec B se otáčí kolem osy s ní rovnoběžné, ale vzdálené $4R/5$ od jeho středu, kde R je poloměr válce. Jaký je poměr rotačních kinetických energií válců? Zajímá nás E_B/E_A, kde E_A, resp. E_B je rotační kinetická energie válce A, resp. B.

Karel chtěl roztočit Lukáše na kolotoči.

Pro rotační kinetickou energii tělesa s momentem setrvačnosti J, rotujícího s úhlovou rychlostí ω, platí

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}J\omega^2 .$$

Moment setrvačnosti válce vzhledem k jeho hlavní ose je

$$J = \frac{1}{2}mR^2 .$$

Kinetickou energii válce A tedy spočítáme jednoduše jako

$$E_A = \frac{1}{4}mR^2\omega^2 .$$

Pro moment setrvačnosti vzhledem k ose posunuté o vzdálenost d podle Steinerovy věty platí $J = J_0 + md^2$. Dosazením do vzorce pro kinetickou energii dostáváme

$$E_B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2 + m\left(\frac{4}{5}R\right)^2\right)\omega^2 = \frac{57}{100}mR^2\omega^2 .$$

Výsledkem úlohy je tedy

$$\frac{E_B}{E_A} = \frac{\frac{57}{100}mR^2\omega^2}{\frac{1}{4}mR^2\omega^2} = \frac{57}{25} = 2{,}28 .$$

Poměr rotačních kinetických energií válců je 2,28.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha FoL.23 ... Trhač

Mějme činku vodorovně zavěšenou ve vzduchu. Pro účely úlohy si činku představíme jako dlouhou, tenkou tyč s malými disky na obou koncích. Na jeden disk naneseme náboj $Q = 100\,\mu\mathrm{C}$, na druhý disk náboj $-Q$; na tyč se náboj nemůže přenést, je dokonale nevodivá. Poté zapneme homogenní elektrické pole o intenzitě $E = 1\,\mathrm{MV{\cdot}m^{-1}}$ paralelní s tyčí, směřující od záporného náboje ke kladnému. Určete, jaké pnutí (v jednotkách Pa a s kladným znaménkem) působí v důsledku elektrostatických sil ve středu tyče. Průměr tyče je $d = 2\,\mathrm{cm}$, délka tyče $l = 1\,\mathrm{m}$. Polarizaci dielektrika neuvažujte.

Mirek nevěděl, že činkami se nemá trhat.

Využijeme superpozici elektrických polí. Náboje, které díky malým rozměrům disků vůči celé čince považujeme za bodové, se přitahují silou

$$F_1 = \frac{kQ^2}{l^2} .$$

Tyč je tedy stlačována silou F_1, čemuž odpovídá tlak

$$p_1 = \frac{F_1}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4kQ^2}{\pi d^2 l^2}\,.$$

Zároveň na náboje působí vnější homogenní pole, které je od sebe odtahuje silou

$$F_2 = EQ\,.$$

Na tyč proto působí pnutí

$$p_2 = \frac{F_2}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4EQ}{\pi d^2}\,.$$

Odečtením pnutí a tlaku dostaneme

$$p_2 - p_1 = \frac{4Q}{\pi d^2}\left(E - \frac{k\,Q}{l^2}\right) \doteq 32\,000\,\mathrm{Pa}\,,$$

což je výsledné pnutí působící na průřez tyče. Tyč by se tedy nerozrhla. Dokonce ani kdyby byla z měkkého plastu. Při zvyšování intenzity pole by došlo k jiskrovému výboji mezi disky, čímž by experiment skončil.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.24 ... nehomogenní

Představme si, že bychom odpalovali vesmírné rakety udělením veškeré potřebné hybnosti už v okamžiku startu. Z povrchu Země vystřelíme raketu o hmotnosti $m = 10\,\mathrm{t}$ svisle vzhůru únikovou rychlostí. V jaké výšce nad povrchem klesne rychlost rakety na polovinu? Výsledek udejte v násobcích poloměru Země R. Zanedbejte vliv atmosféry a rotace Země.

Kuba přemýšlel nad balistickými střelami.

Úniková rychlost je právě tak velká, že se v nekonečnu raketa zastaví. Po celou dobu letu platí zákon zachování energie, proto můžeme dát do rovnosti energii rakety ve vzdálenosti r od středu Země a pro raketu v nekonečnu. Odtud máme

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = 0\,,$$

kde G je gravitační konstanta a M hmotnost Země. V každém okamžiku tedy platí

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{r}\,.$$

Vydělení dvou takových rovnic vidíme, že platí

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = \frac{R}{r}\,,$$

kde $R = 6\,378\,\mathrm{km}$ je poloměr Země a v_0 je počáteční, tedy úniková rychlost. Nyní už snadno píšeme pro výšku rakety

$$h = r - R = R\left(\frac{v_0}{v}\right)^2 - R = 3R\,.$$

Rychlost rakety tedy klesne na polovinu ve výšce $3R$.

Jakub Dolejší
`dolejsi@fykos.cz`

Úloha FoL.25 ... Jáchymovská

Mějme bodový izotropní β zářič s aktivitou $A = 3{,}4567\,\mathrm{MBq}$. Zářič se nachází v bazénu s látkou, která tlumí β záření dle Lambertova-Beerova zákona $N(r) = N_0\exp(-\mu r)$ s absorpčním koeficientem $\mu = 1{,}1198\cdot 10^{-1}\,\mathrm{m^{-1}}$. Do jaké vzdálenosti r od zářiče musíme umístit Geigerův-Müllerův počítač, jenž má plochu detekčního okénka $S = 2{,}7183\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^2}$, aby detekoval v průměru $N = 10$ částic za sekundu? Předpokládejte, že detektor zaznamená každou částici, která se do okénka trefí. *Lukášovi bylo líto použít počítač jen pro stažení zadání.*

Zanedbejme nejprve tlumení látkou. Zářič izotropně září do kulové plochy o obsahu $4\pi r^2$, my z toho ale detekujeme jen tu část, která dopadne do plochy o obsahu S. Počet detekovaných částic tedy bude roven

$$N = \frac{AS}{4\pi r^2}\,.$$

Záření je ale tlumené, vztah tedy ještě musíme přenásobit Lambertovským faktorem. Výsledný vztah pak je

$$N = \frac{AS}{4\pi r^2}\exp\left(-\mu r\right)\,.$$

Jde o nelineární rovnici pro r, kterou nelze jednoduše analyticky vyřešit. Můžeme ji ale vyřešit numericky, či graficky. Grafické řešení obnáší pouze vykreslení grafu funkce $N(r)$ a odečtení hodnoty r pro zadané N.

K numerickému řešení můžeme použít celou plejádu metod, zde zmíníme pouze metodu půlení intervalu. Nejprve zvolme nějaké dostatečně velké R tak, aby hledaný kořen rovnice

$$\frac{AS}{4\pi r^2}\exp\left(-\mu r\right) - N = f(r) = 0$$

ležel v intervalu $(0, R)$. To poznáme například tak, že $f(0)$ a $f(R)$ mají rozdílné znaménko. Poté tento interval rozpůlíme. Z těchto dvou intervalů vybereme ten, ve kterém leží hledaný kořen. Na tento interval aplikujeme celý postup znovu. Opakujeme, dokud nedosáhneme požadované přesnosti.

Vyjde nám, že zářič musíme umístit do vzdálenosti $r \doteq 0{,}269\,35\,\mathrm{m}$.

Lukáš Timko
`lukast@fykos.cz`

Úloha FoL.26 ... šup gallium do horké vody

Máme $m_{\mathrm{Ga}} = 24\,\mathrm{g}$ gallia a rádi bychom s ním udělali nějaký zajímavý experiment. Rozhodneme se tedy připravit horkou vodu o teplotě $t_0 = 93\,^{\circ}\mathrm{C}$ a objemu $V = 250\,\mathrm{ml}$. Gallium si připravíme do nedokonalého kalorimetru s tepelnou kapacitou $C = 95\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}}$ a následně ho zalijeme horkou vodou. Jakou teplotu (ve stupních Celsia) bude mít kalorimetr, gallium a voda po ustálení tepelné rovnováhy? Považujte kalorimetr s vodou a galliem za uzavřenou soustavu. Gallium a kalorimetr měli na počátku teplotu $t_1 = 22\,^{\circ}\mathrm{C}$. Gallium má skupenské teplo tání $l = 5{,}59\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}$, měrnou tepelnou kapacitu v pevném stavu $c_1 = 370\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$ a měrnou tepelnou kapacitu v kapalném stavu uvažujte jako $c_2 = 400\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$. Měrná tepelná kapacita vody je $c = 4\,180\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$. *Karel přemýšlel nad cenou gallia a tak zadal aspoň tohle.*

Úloha se zdá být zpočátku jasná. Budeme dělat tepelnou bilanci přijatého a odevzdaného tepla. Jediná komplikace nastává tím, že teplota tání gallia je $t_t = 29{,}8\,^{\circ}\mathrm{C}$. Nejprve proto zjistíme, o kolik stupňů (označme ΔT) se voda zchladí, když ohřeje gallium o $\Delta t_s = t_t - t_1$ a zároveň ho roztaví. Tepelnou bilanci pro tento děj zapíšeme jako

$$cV\varrho\Delta T = (C + c_1 m_{\mathrm{Ga}})\Delta t_s + m_{\mathrm{Ga}} l\,,$$

kde ϱ je hustota vody, kterou budeme dosazovat jako $1\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$. Zjistíme, že roztavení gallia z původní teploty ochladí vodu jen velmi málo. To znamená, že se ustaví tepelná rovnováha mezi kalorimetrem, vodou a galliem při teplotě vyšší, než je teplota tání gallia. Nyní můžeme napsat celkovou tepelnou bilanci, kde jako t označíme koncovou teplotu.

$$(C + c_1 m_{\mathrm{Ga}})\Delta t_s + m_{\mathrm{Ga}} l + (C + c_2 m_{\mathrm{Ga}})(t - t_t) = (t_0 - t)cV\varrho$$

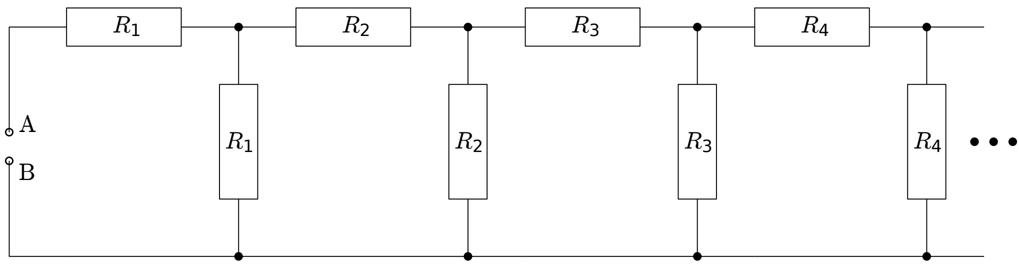
Po dosazení za Δt_s a vyjádření t dostáváme rovnici

$$t = \frac{t_0 cV\varrho + t_t(C + c_2 m_{\mathrm{Ga}}) - m_{\mathrm{Ga}} l - (C + c_1 m_{\mathrm{Ga}})(t_t - t_1)}{(C + c_2 m_{\mathrm{Ga}}) + cV\varrho}\,.$$

Po číselném dosazení dostáváme $t \doteq 86{,}4\,^\circ\mathrm{C}$.

Kateřina Smítalová
`katka@fykos.cz`

Úloha FoL.27 ... zase nekonečný obvod?



Jaký bude celkový odpor mezi body A a B nekonečné odporové sítě, kterou vidíte na obrázku? Odpory rezistorů jsou dané jako $R_i = 2^{i-1}R$, tedy jak je zřejmé z obrázku, dva rezistory mají vždycky stejnou velikost odporu a další dva vpravo od nich mají dvakrát tak velký odpor atd. Pro číselný výsledek uvažujte $R = 3{,}002\,\Omega$.

Karel přemýšlel o variaci na standardní úlohu.

Chceme zjistit celkový odpor celé odporové sítě, tak si jej označme jako R_∞. Jedna možnost by byla počítat částečné součty odporů a sledovat, k jakému číslu nám budou konvergovat. To je ale docela pracná cesta. Daleko jednodušší je využít trik. Pokusme se tedy najít ještě jednou odpor celé sítě a sestavit tak kvadratickou rovnici, kterou následně můžeme vyřešit.

V tomto případě si představme, že odpojíme dva rezistory o odporu $R_1 = R$. Jak vypadá výsledný obvod? Velmi se podobá předchozímu, ale všechny rezistory v něm mají dvojnásobný odpor oproti původní síti. To je přesně to, co jsme potřebovali. Na základě této úvahy můžeme sestavit rovnici

$$R_\infty = R + \frac{2RR_\infty}{R + 2R_\infty}\,.$$

Nyní nám stačí rovnici vyřešit

$$2R_\infty^2 - 3RR_\infty - R^2 = 0\,, \quad \Rightarrow \quad R_\infty = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}R\,.$$

Nyní musíme promyslet, které řešení kvadratické rovnice bude to správné. Vzhledem k tomu, že jedno řešení je záporné, tak snadno vybereme jediné kladné řešení. Celkový odpor odporové sítě je $R_\infty \doteq 5{,}346\,\Omega$.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha FoL.28 ... medaile

Organizátoři FYKOSu se rozhodli pro nejúspěšnější účastníky vyrobit speciální medaile. FYKOSí medaile má tvar válce a skládá se ze tří menších (také válcových) vrstev. První vrstva je z ryzího zlata, druhá ze stříbra a třetí z mědi. Elektrický odpor medaile mezi podstavami je stejný, jako by byl odpor medaile o stejných rozměrech složené pouze z mědi. Tepelná kapacita medaile je stejná, jako by byla tepelná kapacita medaile o stejných rozměrech složené z ryzího zlata. Jaký je poměr hmotností FYKOSí medaile a medaile o stejných rozměrech složené z čistého stříbra? Tepelné kapacity, hustoty a rezistivity čistých kovů lze najít na internetu (nebo v tištěných tabulkách). *Jáchym si myslí, že diplomy nestačí.*

Vrstva zlata bude mít výšku h_{Au}, obdobně pro stříbro a měď dostaneme h_{Ag} a h_{Cu}. Samotná medaile bude mít výšku $h = h_{\mathrm{Au}} + h_{\mathrm{Ag}} + h_{\mathrm{Cu}}$. Víme, že pro elektrický odpor vodiče z materiálu X platí

$$R = \frac{l}{S}\zeta_{\mathrm{X}}\,,$$

kde ζ_{X} je rezistivita. Odpor celé medaile získáme součtem odporů jednotlivých vrstev, což vede na rovnici

$$\frac{h_{\mathrm{Au}}}{S}\zeta_{\mathrm{Au}} + \frac{h_{\mathrm{Ag}}}{S}\zeta_{\mathrm{Ag}} + \frac{h_{\mathrm{Cu}}}{S}\zeta_{\mathrm{Cu}} = \frac{h}{S}\zeta_{\mathrm{Cu}}\,.$$

Dosadíme za h a rovnici vynásobíme S

$$h_{\mathrm{Au}}\zeta_{\mathrm{Au}} + h_{\mathrm{Ag}}\zeta_{\mathrm{Ag}} + h_{\mathrm{Cu}}\zeta_{\mathrm{Cu}} = h_{\mathrm{Au}}\zeta_{\mathrm{Cu}} + h_{\mathrm{Ag}}\zeta_{\mathrm{Cu}} + h_{\mathrm{Cu}}\zeta_{\mathrm{Cu}}\,,$$

$$h_{\mathrm{Au}} = h_{\mathrm{Ag}}\frac{\zeta_{\mathrm{Cu}} - \zeta_{\mathrm{Ag}}}{\zeta_{\mathrm{Au}} - \zeta_{\mathrm{Cu}}} = k_1 h_{\mathrm{Ag}}\,. \tag{1}$$

Pro tepelnou kapacitu tělesa z materiálu X platí

$$C = mc_{\mathrm{X}} = V\varrho_{\mathrm{X}}c_{\mathrm{X}}\,.$$

Celkovou tepelnou kapacitu medaile opět získáme součtem tepelných kapacit jednotlivých vrstev

$$h_{\mathrm{Au}}S\varrho_{\mathrm{Au}}c_{\mathrm{Au}} + h_{\mathrm{Ag}}S\varrho_{\mathrm{Ag}}c_{\mathrm{Ag}} + h_{\mathrm{Cu}}S\varrho_{\mathrm{Cu}}c_{\mathrm{Cu}} = hS\varrho_{\mathrm{Au}}c_{\mathrm{Au}}\,.$$

Dosadíme za h a rovnici vydělíme S

$$h_{\mathrm{Au}}\varrho_{\mathrm{Au}}c_{\mathrm{Au}} + h_{\mathrm{Ag}}\varrho_{\mathrm{Ag}}c_{\mathrm{Ag}} + h_{\mathrm{Cu}}\varrho_{\mathrm{Cu}}c_{\mathrm{Cu}} = h_{\mathrm{Au}}\varrho_{\mathrm{Au}}c_{\mathrm{Au}} + h_{\mathrm{Ag}}\varrho_{\mathrm{Au}}c_{\mathrm{Au}} + h_{\mathrm{Cu}}\varrho_{\mathrm{Au}}c_{\mathrm{Au}}\,,$$

$$h_{\mathrm{Cu}} = h_{\mathrm{Ag}}\frac{\varrho_{\mathrm{Au}}c_{\mathrm{Au}} - \varrho_{\mathrm{Ag}}c_{\mathrm{Ag}}}{\varrho_{\mathrm{Cu}}c_{\mathrm{Cu}} - \varrho_{\mathrm{Au}}c_{\mathrm{Au}}} = k_2 h_{\mathrm{Ag}}\,. \tag{2}$$

Pro poměr hmotností medailí dostáváme

$$k = \frac{h_{\mathrm{Au}}S\varrho_{\mathrm{Au}} + h_{\mathrm{Ag}}S\varrho_{\mathrm{Ag}} + h_{\mathrm{Cu}}S\varrho_{\mathrm{Cu}}}{hS\varrho_{\mathrm{Ag}}} = \frac{h_{\mathrm{Au}}\varrho_{\mathrm{Au}} + h_{\mathrm{Ag}}\varrho_{\mathrm{Ag}} + h_{\mathrm{Cu}}\varrho_{\mathrm{Cu}}}{h_{\mathrm{Au}}\varrho_{\mathrm{Ag}} + h_{\mathrm{Ag}}\varrho_{\mathrm{Ag}} + h_{\mathrm{Cu}}\varrho_{\mathrm{Ag}}}\,.$$

Z rovnic (1) a (2) si dosadíme za h_{Au} a h_{Cu} a dostaneme výsledek

$$k = \frac{h_{\mathrm{Ag}}k_1\varrho_{\mathrm{Au}} + h_{\mathrm{Ag}}\varrho_{\mathrm{Ag}} + h_{\mathrm{Ag}}k_2\varrho_{\mathrm{Cu}}}{h_{\mathrm{Ag}}k_1\varrho_{\mathrm{Ag}} + h_{\mathrm{Ag}}\varrho_{\mathrm{Ag}} + h_{\mathrm{Ag}}k_2\varrho_{\mathrm{Ag}}} = \frac{1 + \frac{1}{\varrho_{\mathrm{Ag}}}\left(k_1\varrho_{\mathrm{Au}} + k_2\varrho_{\mathrm{Cu}}\right)}{1 + k_1 + k_2}\,.$$

Číselným dosazením najdeme hledaný poměr $k \doteq 1{,}1$.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FoL.29 ... rozestavěná Dysonova sféra

Dysonova sféra je hypotetická konstrukce obklopující hvězdu, kterou vytvoří vyspělá civilizace, aby mohla využívat veškerou energii přicházející z jejich hvězdy. Mělo by jít o relativně tenkou slupku o poloměru srovnatelném se vzdáleností planet. Jakou rovnovážnou teplotu T_{S} by měla tato slupka ve srovnání s rovnovážnou teplotou planety T_{P}, která by obíhala stejnou hvězdu po kruhové orbitě ve stejné vzdálenosti, jako je poloměr Dysonovy sféry (v soustavě bez jakékoliv Dysonovy sféry)? Uvažujte, že planeta i Dysonova sféra jsou dokonale černá tělesa a všechna tělesa v úloze vyzařují izotropně. Zanedbejte reliktní záření a záření dalších těles ve vesmíru. Jako výsledek udejte poměr $k = T_{\mathrm{S}}/T_{\mathrm{P}}$. *Karel přemýšlel nad přenosem tepla vyzařováním.*

Dysonova sféra pohltí veškerý výkon Slunce a vyzáří ho oběma svými stranami (dovnitř i ven). Všechno, co vyzáří zpět dovnitř ale zase sféra později pohltí (záření, které dopadne zpět do slunce je zanedbatelné). Aby nastala rovnováha, musí vyzářit svou vnější stranou stejný výkon, jako je výkon Slunce (ten označíme P_{S}).

$$P_{\mathrm{S}} = 4\pi R^2\sigma T_{\mathrm{S}}^4\,,$$

$$T_{\mathrm{S}} = \sqrt[4]{\frac{P_{\mathrm{S}}}{4\pi R^2\sigma}}\,,$$

kde R je vzdálenost od Slunce a $4\pi R^2$ je povrch sféry. Slunce vyzařuje rovnoměrně a na planetu dopadá záření o výkonu

$$P = P_{\mathrm{S}}\frac{\pi r^2}{4\pi R^2}\,,$$

kde πr^2 je obsah průřezu planety. Planeta zároveň musí stejný výkon svým povrchem vyzářit

$$P = 4\pi r^2\sigma T_{\mathrm{P}}^4\,,$$

$$T_{\mathrm{P}} = \sqrt[4]{\frac{P}{4\pi r^2\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{P_{\mathrm{S}}\frac{\pi r^2}{4\pi R^2}}{4\pi r^2\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{P_{\mathrm{S}}}{16\pi R^2\sigma}}\,.$$

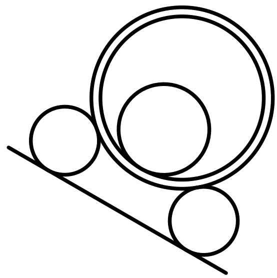
Následně vyjádříme hledaný poměr

$$k = \frac{T_\mathrm{S}}{T_\mathrm{P}} = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}\,.$$

Teplota Dysonovy sféry by se ustálila na $\sqrt{2}$násobku teploty planety.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha FoL.30 ... příliš mnoho válců



Na rovině nakloněné pod úhlem 35° se nachází soustava složená ze tří plných válců a jednoho dutého válce. Dva menší válce mají poloměr $r_1 = 0{,}1\,\mathrm{m}$ a moment setrvačnosti $J_1 = 2\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$, prostřední válec má $r_2 = 0{,}15\,\mathrm{m}$ a $J_2 = 10\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$ a pro dutý válec platí $r_3 = 0{,}3\,\mathrm{m}$, $d = 0{,}02\,\mathrm{m}$ a $J_3 = 20\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$, kde r_3 je vnější poloměr a d je tloušťka stěny. Všechny válce jsou homogenní. Pevná konstrukce zanedbatelné hmotnosti drží válce vůči sobě ve stále stejné poloze jako na obrázku, ale umožňuje jim rotovat různou rychlostí. Předpokládejme, že nikde nedochází k prokluzům. Jakou vzdálenost urazí soustava za 15 s od vypuštění?

Protože jeden válec je moc mainstream.

Úhlovou rychlost obou malých válců označíme ω_1. Potom se celá soustava pohybuje rychlostí $v = \omega_1 r_1$. Pro úhlovou rychlost dutého válce platí

$$\omega_3 = \omega_1 \frac{r_1}{r_3}\,.$$

Pro úhlovou rychlost prostředního válce dostaneme

$$\omega_2 = \omega_3 \frac{r_3 - d}{r_2} = \omega_1 \frac{r_1}{r_3}\frac{r_3 - d}{r_2}\,.$$

Hmotnosti jednotlivých těles určíme ze vzorce pro moment setrvačnosti

$$m_1 = \frac{2J_1}{r_1^2}\,,$$

$$m_2 = \frac{2J_2}{r_2^2}\,,$$

$$m_3 = \frac{2J_3}{\left(r_3^2 + (r_3 - d)^2\right)}\,.$$

Pro kinetickou energii tělesa platí $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$. Pokud pro každé těleso dosadíme za neznámé ze vzorců výše, zjistíme, že pro celkovou kinetickou energii soustavy platí

$$E_\mathrm{k} = \frac{3J_1}{r_1^2}v^2 + \frac{J_2}{r_2^2}v^2 + \frac{(r_3 - d)^2 J_2}{2r_2^2 r_3^2}v^2 + \frac{J_3}{\left(r_3^2 + (r_3 - d)^2\right)}v^2 + \frac{J_3}{2r_3^2}v^2 = kv^2\,.$$

Na začátku se soustava nachází v nulové výšce s nulovou potenciální energií. Pokud urazí vzdálenost x, dostane se do výšky $h = -x\sin\alpha$, kde α je sklon nakloněné roviny. Její potenciální energie potom bude $E_\mathrm{p} = mgh = -mgx\sin\alpha$, kde $m = 2m_1 + m_2 + m_3$. Celková mechanická energie soustavy se nemění, takže dostáváme

$$E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} = kv^2 - mgx\sin\alpha = 0\,,$$
$$v^2 = \frac{mg\sin\alpha}{k}x\,.$$

Soustava má konstantní zrychlení, takže můžeme použít vzorce $v = at$ a $x = \frac{1}{2}at^2$. Pak máme

$$a = \frac{mg\sin\alpha}{2k}\,.$$

Nyní už jen dosadíme za zrychlení do vzorce pro výpočet x

$$x = \frac{mg\sin\alpha}{4k}t^2\,,$$

tedy $x \doteq 415\,\mathrm{m}$.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FoL.31 ... slyším se?

Říká se, že Chuck Norris běhá pro pivo tak rychle, že sám sebe potkává. Jaké by to ale bylo, kdyby Chuck nemohl porušovat fyzikální zákony? Z teorie relativity víme, že se nemůže pohybovat rychleji než světlo, a tudíž ve vakuu nemůže vidět fotony, které sám vyslal (bez odrazu nebo ohybu světla). Mohl by ale slyšet sám sebe? Jakou nejnižší rychlostí může běžet, aby při zpáteční cestě slyšel (zrychleně) pozpátku to, co říkal, když běžel pro pivo? Chuck mluví frekvencí $f = 200\,\mathrm{Hz}$, a lidské (i Chuckovo) ucho slyší frekvence v intervalu $20\,\mathrm{Hz}$ až $20\,\mathrm{kHz}$. Rychlost zvuku je $c = 340\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Matěj se zamyslel, jaké by to bylo, kdyby se Chuck Norris řídil fyzikálními zákony.

Aby mohl sám sebe slyšet, musí předběhnout zvukové vlny, které sám vydává. Musí tedy platit, že Chuckova rychlost v je vyšší než c. Když se obrátí a poběží rychlostí v zase zpátky, bude postupně potkávat starší a starší zvukové vlny, které vydal před delší dobou. Proto uslyší pozpátku to, co říkal. Vyjdeme z Dopplerova jevu, který nám říká, jak se změní frekvence zvuku při pohybu zdroje i přijímače směrem k sobě rychlostí v

$$\frac{f'}{f} = \frac{c+v}{c-v}\,.$$

Podmínky toho, aby se uslyšel, jsou

$$20\,\mathrm{Hz} \leq -f' \leq 20\,000\,\mathrm{Hz}\,,$$
$$0{,}1 \leq -\frac{f'}{f} \leq 100\,.$$

Z Dopplerova jevu také vyplývá, že pokud se zdroj i přijímač pohybují směrem k sobě stejnou rychlostí, nikdy nemůže dojít k tomu, že by absolutní hodnota přijaté frekvence byla menší než ta vyslaná. Bude nás tedy zajímat pouze druhá podmínka, udávající, že poměr frekvencí musí být menší než 100. Znaménko mínus ve výpočtech vyjadřuje, že se Chuck slyší pozpátku. Frekvence tedy musí být záporná. Z předchozí rovnice vyjádříme závislost rychlosti v na změně frekvence

$$v = \frac{\frac{f'}{f} - 1}{\frac{f'}{f} + 1} c\,.$$

Po dosazení $f'/f = -100$ dostáváme podmínku pro rychlost, kterou se Chuck může pohybovat.

$$v \geq \frac{101}{99} c = 346{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Pro všechny vyšší rychlosti se zřetelně uslyší a přijatá frekvence se bude blížit k vyslané (záporné) frekvenci.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha FoL.32 ... za chvíli tam budeme

*Ve vzdálené galaxii byla sestavena gigantická vesmírná loď, která se dokáže pohybovat ohromnou rychlostí $v = 0{,}002c$. Po dosažení maximální rychlosti je na lodi nastaven kurz Země. Jaké chyby se dopustí pozemští pozorovatelé při odhadu vzdálenosti, jestliže ji považují za hvězdu a stanoví její rudý posuv jako hodnotu $z = 0{,}005$? Počítají přitom s Hubbleovou konstantou $H = 70\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}{\cdot}MPc^{-1}}$. Výsledek uveďte v **megaparsecích**.*

Mirek se bál útoku z vesmíru.

Velikost rudého posuvu a rychlost lodi jsou dost malé na to, abychom mohli použít lineární aproximaci Dopplerova efektu, tedy

$$v_\mathrm{r} = zc\,,$$

kde v_r je rychlost vzdalování. Podle Hubbleova zákona platí

$$v_\mathrm{r} = HD\,,$$

kde D je vzdálenost objektu. Podle pozorovatelů na Zemi se loď nachází ve vzdálenosti

$$D = \frac{zc}{H}\,,$$

ale její skutečná vzdálenost je

$$D' = \left(z + \frac{v}{c}\right)\frac{c}{H}\,.$$

Pozorovatelé se tedy dopustili chyby

$$|D' - D| = \frac{v}{H} \doteq 8{,}6\,\mathrm{MPc}\,.$$

Loď k nám samozřejmě nikdy nedoletí, což platí pro každý objekt, u kterého pozorujeme rudý posuv.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.33 ... nuda v laboratoři

Sedíme v laboratoři a měříme spektrální čáry vodíku. V sérii měření objevíme jednu neobvykle nízkou hodnotu, $\lambda = 91{,}184\,\mathrm{nm}$*. Jestliže uvažujeme Bohrův model atomu, v jaké vzdálenosti od jádra se musel před přechodem nacházet elektron, který má na svědomí zmíněnou vlnovou délku? Předpokládejte, že elektron byl skutečně vázaný v atomu. Při výpočtech vycházejte z ionizační energie vodíku* $E_0 = 13{,}598\,4\,\mathrm{eV}$*, Planckovy konstanty* $h = 6{,}626\,07 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}s}$*, rychlosti světla* $c = 2{,}997\,92 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ *a elementárního náboje* $e = 1{,}602\,18 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$.
Nápověda *Hodnoty konstant a veličin dosazujte se všemi zadanými platnými místy!*

Mirek vidí atomy.

Pro vodík lze z Bohrova modelu odvodit vztah pro vlnovou délku emitovaného záření

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E_0}{hc}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right),$$

kde n_2 je celé číslo popisující počáteční energetickou hladinu elektronu a n_1 konečnou hladinu. E_0 je ionizační energie (přepočtená z eV na J vynásobením e). Trocha fyzikálních znalostí nám napoví, že se pohybujeme v Lymanově sérii, tedy $n_1 = 1$ (samozřejmě není problém toto ověřit).

Vzdálenost elektronu od jádra je v Bohrově modelu dána výrazem

$$r_n = r_0 n^2\,,$$

kde $r_0 \doteq 52{,}9\,\mathrm{pm}$ je Bohrův poloměr. Vyjádřením n_2 ze vztahu pro vlnovou délku (zde nemá smysl zaokrouhlovat na celé číslo vzhledem k nedostatečné přesnosti veličin) a dosazením do vzorce pro vzdálenost dostaneme

$$r = \frac{r_0}{1 - \frac{hc}{\lambda E_0}} \doteq 0{,}55\,\mathrm{\mu m}\,.$$

Můžeme tedy říci, že před vyzářením fotonu měl atom rozměr jako průměrná bakterie.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.34 ... hlasitá muzika

Na diskotéce hraje muzika z jednoho reproduktoru o výkonu $200\,\mathrm{W}$*. Matějovi se ale nelíbí hudba, která hraje, proto si na svém mobilu pustí vlastní písničku reproduktorem o výkonu* $4\,\mathrm{W}$*. Kolik lidí slyší Matějovu písničku lépe než disco, jestliže Matěj stojí* $10\,\mathrm{m}$ *od reproduktoru a hustota lidí je* $2\,\mathrm{m^{-2}}$*?* *Na diskotéce je obvyklé přemýšlet o takovýchto otázkách, ne?*

Lidé uslyší lépe tu písničku, jejíž intenzita bude v místě poslouchání vyšší. Výkon disco reproduktoru označíme P_D, výkon mobilu P_M. Vyjdeme z faktu, že intenzita zvuku I je výkon dopadající na jednotkovou plochu

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}\,,$$

kde r je vzdálenost od zdroje o výkonu P. Zavedeme si kartézskou soustavu souřadnic. Disco reproduktor umístíme do počátku a mobil na souřadnici $(l, 0)$, kde $l = 10\,\mathrm{m}$. Závislost jednotlivých intenzit na poloze přijímače je

$$I_\mathrm{D} = \frac{P_\mathrm{D}}{4\pi(x^2 + y^2)}\,,$$
$$I_\mathrm{M} = \frac{P_\mathrm{M}}{4\pi[(x - l)^2 + y^2]}\,.$$

Najdeme křivku, která ohraničuje území s vyšší intenzitou mobilu

$$\begin{aligned}
I_\mathrm{D} &= I_\mathrm{M}\,,\\
\frac{P_\mathrm{D}}{4\pi\left(x^2 + y^2\right)} &= \frac{P_\mathrm{M}}{4\pi\left((x - l)^2 + y^2\right)}\,,\\
P_\mathrm{D}(x - l)^2 + P_\mathrm{D}y^2 &= P_\mathrm{M}x^2 + P_\mathrm{M}y^2\,,\\
x^2(P_\mathrm{D} - P_\mathrm{M}) + y^2(P_\mathrm{D} - P_\mathrm{M}) - 2xlP_\mathrm{D} + P_\mathrm{D}l^2 &= 0\,,\\
x^2 - x\frac{2lP_\mathrm{D}}{P_\mathrm{D} - P_\mathrm{M}} + y^2 + \frac{P_\mathrm{D}l^2}{P_\mathrm{D} - P_\mathrm{M}} &= 0\,,\\
\left(x - \frac{2lP_\mathrm{D}}{P_\mathrm{D} - P_\mathrm{M}}\right)^2 + y^2 &= \frac{P_\mathrm{D}^2 l^2}{(P_\mathrm{D} - P_\mathrm{M})^2} - \frac{P_\mathrm{D}l^2}{P_\mathrm{D} - P_\mathrm{M}}\,,\\
\left(x - \frac{2lP_\mathrm{D}}{P_\mathrm{D} - P_\mathrm{M}}\right)^2 + y^2 &= \frac{P_\mathrm{D}P_\mathrm{L}l^2}{(P_\mathrm{D} - P_\mathrm{M})^2}\,.
\end{aligned}$$

Rovnici se nám podařilo dostat do středového tvaru kružnice. Takovéto kružnici se říká Apollóniova. Její poloměr je

$$r^2 = \frac{P_\mathrm{D}P_\mathrm{L}l^2}{(P_\mathrm{D} - P_\mathrm{M})^2}\,.$$

Obsah této kružnice je

$$S = \frac{\pi P_\mathrm{D}P_\mathrm{L}l^2}{(P_\mathrm{D} - P_\mathrm{M})^2} \doteq 6{,}54\,\mathrm{m}^{-2}\,.$$

Počet lidí, kteří uslyší písničku z mobilu s větší intenzitou, je tedy $S \cdot 2\,\mathrm{m}^{-2} \doteq 13$ lidí.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha FoL.35 ... fotbalista

Jakou nejnižší rychlostí musí fotbalista vykopnout balon z velkého vápna, aby trefil břevno? Branka je vzdálená $d = 16{,}5\,\mathrm{m}$ a vysoká $h = 2{,}44\,\mathrm{m}$. Zanedbejte odpor vzduchu a rozměry míče a břevna. *Kuba to chtěl ošulit.*

Nejmenší potřebná rychlost odpovídá nejmenší vzdálenosti k brance, proto postavíme fotbalistu kolmo před branku a necháme ho míč kopnout po kolmici k brance. V tuto chvíli budeme řešit dvourozměrný problém.

Jedná se o vrh šikmý vzhůru, tedy ho popisují rovnice

$$x = vt\cos\alpha\,,$$
$$y = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\,,$$

kde v je počáteční rychlost balonu a α je jeho elevační úhel. V čase t dojde k trefě břevna, tedy

$$d = vt\cos\alpha\,,$$
$$h = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

Odtud dostaneme dvě dvojice řešení (v,t), přičemž pouze jedna z nich má t kladné. Dostáváme

$$v = \frac{d}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(d\operatorname{tg}\alpha - h)}} = d\sqrt{\frac{g}{d\sin(2\alpha) - h\cos(2\alpha) - h}}\,,$$

kde jsme využili vztahů pro sinus a kosinus dvojnásobného úhlu.

Nyní máme funkce rychlosti závislé pouze na elevačním úhlu. Minimum rychlosti nastane pro maximum jmenovatele uvnitř odmocniny, tedy platí, že její derivace podle α je nulová. Dostáváme,

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(d\sin(2\alpha) - h\cos(2\alpha) - h\right) = 2d\cos(2\alpha) + 2h\sin(2\alpha) = 0\,,$$
$$\operatorname{tg}(2\alpha) = -\frac{d}{h}\,.$$

Získali jsme jediný extrém, který však musí být minimem, protože funkce $v(\alpha)$ je spojitá a pro úhly 90° a $\operatorname{arctg}(h/d)$ máme $v = +\infty$.

Protože máme $\operatorname{tg}(2\alpha) < 0$ a současně $\alpha \in (0, 90^\circ)$, musí také platit $2\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$, a tedy $\sin(2\alpha) > 0$ a $\cos(2\alpha) < 0$. Pomocí vztahů mezi goniometrickými funkcemi můžeme nyní jednoznačně vyjádřit

$$\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2\alpha)}} = -\frac{h}{\sqrt{d^2 + h^2}}\,,$$
$$\sin(2\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(2\alpha)} = \frac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}}\,.$$

Teď už jen dosadíme do vztahu pro rychlost, čímž dostaneme finální vzorec pro minimální rychlost balonu

$$v = \sqrt{g}\sqrt{\sqrt{d^2 + h^2} + h} \doteq 13{,}7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Platí tedy $v \doteq 13{,}7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Jakub Dolejší
`dolejsi@fykos.cz`

Úloha FoL.36 ... voda nad zlato

Lord Waterboard si chce nechat celý svůj vodotěsný hrad naplnit vodou. Padací dveře hradu mají obdélníkový tvar (výška $h = 3\,\mathrm{m}$ a šířka $s = 2\,\mathrm{m}$) a mohou se otáčet kolem své spodní hrany. Dveře jsou nahoře zabezpečeny západkou, která udrží maximální sílu $F = 50\,\mathrm{kN}$ (spodní panty udrží libovolnou sílu). V jaké výšce nad zemí bude hladina vody ve chvíli, kdy se tato pojistka uvolní a všechna lordova voda vyteče na ubohé vesničany? *Matěj měl žízeň.*

Jelikož dveře fungují jako páka, na západku působí síla jiná, než je samotná tlaková síla vody. Proto musíme uvážit moment síly, kterým voda na dveře působí.

Maximální moment síly, který může na dveře působit, je $M = hF$. Výšku hladiny označme H. Tlak ve výšce x nad zemí udává $p(x) = (H - x)\varrho g$. Mohou nastat dva případy v závislosti na tom, zda H bude vyšší nebo nižší než h. Ze zadaných hodnot vychází, že $H > h$ (viz. níže). Za tohoto predpokladu, moment síly, kterým působí voda na dveře, spočítáme integrálem

$$M = s\int_0^h xp(x)\,\mathrm{d}x = s\varrho g\left(\frac{1}{2}Hh^2 - \frac{1}{3}h^3\right) .$$

Dostáváme

$$hF = s\varrho g\left(\frac{1}{2}Hh^2 - \frac{1}{3}h^3\right) ,$$

$$H = \frac{2s\varrho gh^3 + 6hF}{3s\varrho gh^2} \doteq 3{,}7\,\mathrm{m} ,$$

což splňuje podmínku $H > h$. Pokud bychom řešili druhý případ (kdy hladina má být nižší než dveře), dostali bychom $H \doteq 3{,}6\,\mathrm{m}$, z čehož bychom viděli, že předpoklad nebyl splněn.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha FoL.37 ... nepotopená

Na rovné hladině rybníka plave (vrchem dolů) dutá polokoule s průměrem $d = 30\,\mathrm{cm}$ a hmotností $m = 0{,}2\,\mathrm{kg}$. Do nejníže položeného bodu polokoule zatlačíme směrem přímo dolů. Jakou největší kinetickou energii můžeme tímto postrčením udělit, aby dokázala kmitat bez potopení? Odpor vody neuvažujte. *Xellos položil lžičku na čaj.*

Kmity sú nepodstatné, polguľa sa potopí vtedy, keď voda dosiahne jej vrch. Hľadaná kinetická energia je teda rovná práci, ktorú musíme vykonať, aby guľa klesla z rovnovážnej polohy do tejto.

Na guľu, ktorej vrchol je ponorený ho hĺbky x, pôsobí smerom hore výslednica tiažovej a vztlakovej sily

$$F(x) = \varrho\pi\left(Rx^2 - \frac{x^3}{3}\right)g - mg ;$$

využili sme objem guľového vrchlíka $V = \pi(Rx^2 - x^3/3)$. Integrovaním tejto sily dostaneme

$$W = \varrho\pi(\frac{Rx^3}{3} - \frac{x^4}{12})g - mgx .$$

Integrujeme od rovnovážnej polohy $F = 0$ po $x = R$. V rovn. polohe je

$$Rx^2 - \frac{x^3}{3} = \frac{m}{\varrho\pi}\,,$$

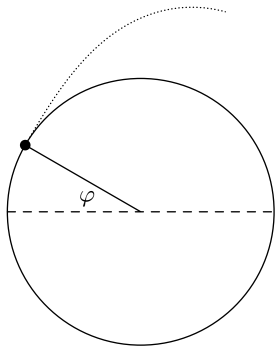
čo je kubická rovnica bez pekných riešení; pre konkrétne hodnoty zo zadania dostávame riešenie $x_0 \doteq 2{,}11\,\mathrm{cm}$. Maximálnu kinetickú energiu získame dosadením $W(R) - W(x_0) \doteq 3{,}63\,\mathrm{J}$.

Jakub Šafin
`xellos@fykos.cz`

Úloha FoL.38 ... v dešti

Jedete na kole v dešti a před vámi je kaluž. Nemáte blatník, proto zpomalíte na rychlost $3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. *Do jaké maximální výšky nad zemí (v* cm*) vystříkne voda, která odlétá vlivem odstředivé síly z pneumatiky o poloměru* $35\,\mathrm{cm}$*? Odpor prostředí neuvažujte.*

Štěpán jel v dešti na kole.



Voda vlivem odstředivé síly stříká ze všech míst na povrchu pneumatiky. Rozeberme situaci pro bod na pneumatice pod úhlem φ, jak je vyznačeno na obrázku. Z místa pod úhlem $\varphi = 0$ voda stříká svisle vzhůru, zatímco pod úhlem $\varphi = \pi/2$, což je nejvyšší místo na pneumatice, voda stříká vodorovně.

Vertikální rychlost stříkající vody v místě na pneumatice pod úhlem φ bude $v_y = v\cos\varphi$. Výška tohoto místa nad zemí pak bude $y_0 = r\sin\varphi + r$, nesmíme totiž zapomenout, že střed kola je ve výšce r.

Klasickým vzorečkem pro svislý vrh lze dojít k maximální výšce, do které kapička doletí, pokud opustí místo na povrchu pneumatiky pod úhlem φ

$$h(\varphi) = y_0 + \frac{v_y^2}{2g} = r\sin\varphi + r + \frac{v^2\cos^2\varphi}{2g}\,.$$

Hledáme maximální výšku, kam dostříkne voda. Řešení se bude nacházet v intervalu $\varphi \in \langle 0, \pi/2\rangle$, protože v jiných místech stříká voda přímo dolů, nebo nedostříkne tak vysoko.

První derivací funkce h je

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\varphi} = \cos\varphi\left(r - \frac{v^2}{g}\sin\varphi\right)\,.$$

Funkce může mít extrém tam, kde je první derivace nulová, tedy v bodech

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}\,,$$
$$\varphi_2 = \arcsin\left(\frac{gr}{v^2}\right)\,.$$

Dosazením zjistíme, že v φ_1 je minimum, zatímco v φ_2 je maximum. Maximální výška nad zemí, které dosáhne stříkající voda, pak bude

$$h(\varphi_2) = \frac{\left(gr + v^2\right)^2}{2gv^2}\,,$$

tedy $h(\varphi_2) \doteq 87{,}5\,\mathrm{cm}$.

Štěpán Stenchlák
`stenchlak@fykos.cz`

Úloha FoL.39 ... rozproudit závity

Zničehonic zmizelo zemské magnetické pole a je potřeba ho nahradit. Víme, že původní pole bylo přibližně dipólové a jeho sílu šlo na rovníku vyjádřit pomocí vztahu $|B| = B_0/R^3$, kde $B_0 = 3{,}1 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$ a R je vzdálenost od středu Země zadaná v násobcích poloměru Země. Doprostřed Země vložíme cívku (solenoid), pomocí níž budeme chtít původní magnetické pole nahradit. Cívka má $N = 10^6$ závitů a její drát je navinut do šroubovice s poloměrem $\varrho = 1\,\mathrm{m}$. Jaký proud musí cívkou procházet, aby bylo nové magnetické pole stejně silné jako to původní? Uvažujte, že permeablita materiálů se neliší od vakuové. *Mirek neumí počítat do čtyř.*

Solenoid, kterým prochází proud, vytváří magnetické pole, které v dostatečné vzdálenosti odpovídá poli dipólovému. Dipólový moment jedné smyčky je dán vztahem

$$m = IS\,,$$

kde I je procházející proud a S plocha uzavřená smyčkou. Pro naši cívku s N závity lze vyjádřit magnetický moment M ve tvaru

$$M = NI\pi\varrho^2\,.$$

Pole generované dipólovým momentem $\boldsymbol{M}$ je popsáno vzorcem

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}|^5} - \frac{\boldsymbol{M}}{|\boldsymbol{r}|^3}\right),$$

kde μ_0 je permeabilita vakua a $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor vycházející ze středu dipólu. První člen v závorce je na rovníku nulový ($\boldsymbol{M}$ je orientován severojižním směrem). Pro velikost pole cívky na rovníku tedy platí

$$|B| = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{M}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{NI\pi\varrho^2}{r^3}\,.$$

Po srovnání s magnetickým polem Země dostaneme rovnici

$$\frac{B_0 R_\mathrm{E}^3}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{NI\pi\varrho^2}{r^3}\,,$$

z níž vyjádříme hledaný proud

$$I = \frac{4B_0R_\mathrm{E}^3}{\mu_0 N\varrho^2}\,.$$

Po číselném dosazení vyjde $I \doteq 2{,}6\cdot 10^{16}\,\mathrm{A}$. Můžeme tedy bezpečně říci, že pokud by se nějakým zázrakem cívka neroztavila v zemském jádře, zcela jistě by se roztavila po průchodu proudu (roztavila je mírné slovo).

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.40 ... výhodná jízda

Elektrické auto jede po rovince. Jeho účinný průřez je $S = 2\,\mathrm{m}^2$ *a odporový koeficient* $C = 0{,}2$*. Motor má účinnost* $\eta = 40\,\%$*. Jakou stálou rychlostí se vyplatí jet (ve smyslu největšího dojezdu), jestliže spotřeba energie uvnitř auta (klimatizace/topení, rádio,...) je konstantní, a to* $P_0 = 400\,\mathrm{W}$*? Hustota vzduchu je* $\varrho = 1{,}29\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$*.* *Matěj snil o řízení Tesly.*

Použijeme newtonův vztah pro odporovou sílu

$$F_\mathrm{o} = \frac{1}{2} C S \varrho v^2 \,.$$

Výkon auta při jízdě rychlostí v je

$$P_v = F_\mathrm{o} v = \frac{1}{2} C S \varrho v^3 \,.$$

Celková spotřeba energie motoru je součtem tohoto výkonu (přenásobeného převrácenou hodnotou účinnosti) a výkonu, který je potřeba na spotřebiče uvnitř auta. Tím dostáváme

$$P = \frac{1}{\eta} P_v + P_0 \,.$$

Je-li kapacita baterie auta E, pak vydrží jet čas $t = \frac{E}{P}$ a ujede vzdálenost

$$s = vt = \frac{Ev}{P} = \frac{Ev}{\frac{1}{2\eta} C S \varrho v^3 + P_0} \,.$$

Tuto vzdálenost chceme maximalizovat. Hledáme tedy rychlost, při které je první derivace nulová

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}v} = \frac{E \frac{1}{2\eta} C S \varrho v^3 + E P_0 - E v \frac{3}{2\eta} C S \varrho v^2}{\left(\frac{1}{2\eta} C S \varrho v^3 + P_0\right)^2} = 0 \,,$$

$$\frac{1}{2\eta} C S \varrho v^3 + P_0 - \frac{3}{2\eta} C S \varrho v^3 = 0 \,,$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{P_0 \eta}{C S \varrho}} \,.$$

Číselně tedy $v \doteq 6{,}77\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha FoL.41 ... parný den

Po moři v rovníkové oblasti během jarní rovnodennosti plove malá lodička, kterou si můžeme představit jako desku s plochou $5\,\mathrm{m}^2$*. Slunce po celý den svítí s intenzitou* $1{,}3\,\mathrm{kW{\cdot}m^{-2}}$*. Kolik energie v* MJ *předá Slunce lodičce v době mezi svým východem a západem?*

Štěpán sledoval rozpálené střechy.

Je třeba si uvědomit, že úhel, pod kterým Slunce svítí na lodičku, se v průběhu dne mění. Těsně po východu a před západem bude dopadající výkon minimální, zatímco během poledne maximální. Předpokládáme, že rychlost lodičky je zanedbatelná vůči rychlosti rotace zemského rovníku.

Jestliže paprsky svírají s lodí úhel α, celkový světelný výkon lze spočíst jako $P(\alpha) = SI \sin\alpha$, kde S je plocha lodičky a I je zadaná intenzita. Označme celkový čas dne $T = 12\,\mathrm{h}$. Úhel α se s časem lineárně mění a jeho závislost lze zapsat jako $\alpha(t) = \pi t/T$, protože po dvanácti hodinách Slunce opíše půl kruhu. Celkovou předanou energii pak spočteme jako integrál

$$E = \int_0^T P(\alpha)\,\mathrm{d}t = SI \int_0^T \sin\left(\pi \frac{t}{T}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{2SIT}{\pi}\,.$$

Lodičce bude předáno 178,8 MJ sluneční energie, což je pro zajímavost 64 % energie předané loďce v případě, že celých 12 hodin by se Slunce nacházelo v nadhlavníku.

Štěpán Stenchlák
`stenchlak@fykos.cz`

Úloha FoL.42 ... až nahoru, prosím

Jaká je minimální délka (v kilometrech) vesmírného výtahu upevněného na zemském rovníku, aby se vlivem gravitace nezhroutil? Vesmírný výtah si představujeme jako několik přímých lan vedoucích do vesmíru. Výtah je po celé délce homogenní a neobsahuje koncové závaží.

Triviální řešení nulové délky nás nezajímá. *Štěpán zapomněl, jak se používá výtah.*

Nejnižší délka lana odpovídá případu, kdy lano bude po celé délce svislé.

Pro snazší výpočet si zavedeme délkovou hustotu výtahu σ.

Nyní se zaměříme na malý úsek výtahu, jehož délka je $\mathrm{d}r$ a vzdálenost od středu Země r. Hmotnost této části je tedy $\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}r$. Tento malý úsek je přitahován gravitační silou $G\frac{M\mathrm{d}m}{r^2}$, kde G je gravitační konstanta a M je hmotnost Země. Zároveň je tento úsek odpuzován odstředivou silou $-\omega^2 r\mathrm{d}m$, kde ω je úhlová rychlost otáčení Země. Je třeba si uvědomit, že síly působí opačnými směry, proto je potřeba u jedné z nich zaměnit znaménko.

Sečtením těchto dvou (protichůdných) sil získáme celkovou sílu, kterou je na malý kousek výtahu působeno

$$\mathrm{d}F = \sigma\left(G\frac{M}{r^2} - \omega^2 r\right)\mathrm{d}r\,.$$

V malých vzdálenostech bude větší síla gravitační, proto bude $\mathrm{d}F > 0$. V určité výšce, na takzvané geostacionární orbitě, bude $\mathrm{d}F = 0$. Pro zbývající úseky bude větší síla odstředivá a $\mathrm{d}F < 0$. Nás zajímá taková délka výtahu, měřená od povrchu Země s poloměrem R do výšky nad povrchem h, při které bude součet všech sil právě nulový. Tedy přitažlivé síly v nízkých výškách a odstředivé ve vyšších se vyrovnají a náš výtah ani nespadne, ani se neutrhne. Musí tedy platit

$$\int_R^{R+h} \mathrm{d}F = 0\,,$$

$$\sigma\left(\frac{hGM}{R(R+h)} - \frac{1}{2}h\omega^2(2R+h)\right) = 0\,.$$

V poslední rovnici je neznámou pouze h, po menších úpravách lze dojít ke kvadratické rovnici s vyhovujícím kořenem

$$h = \sqrt{\frac{2GM}{R\omega^2} + \frac{R^2}{4}} - \frac{3R}{2}\,,$$

tedy $h \doteq 144\,000\,\mathrm{km}$.

Štěpán Stenchlák
`stenchlak@fykos.cz`

Úloha FoL.43 ... sprcha

Na jak dlouhou dobu sprchování vystačí voda ve válcovém bojleru o průřezu $S = 0{,}8\,\mathrm{m}^2$ a výšce $H = 1{,}5\,\mathrm{m}$. Samotná sprcha vychází přímo ze dna bojleru a celkový obsah výtokové plochy je $s = 0{,}8\,\mathrm{cm}^2$? Jako limit sprchovatelnosti považujte minimální objemový tok $Q_0 = 2\,\mathrm{dl{\cdot}s^{-1}}$. Uvažujte, že do bojleru voda nepřitéká a že do sprchy jde voda pouze z bojleru.

Výsledek udejte v minutách. *Na Kubu nevyzbyla voda!*

Pro tok vody musí platit rovnice kontinuity a Bernoulliho rovnice

$$Q = Sv = su\,,$$
$$\frac{1}{2}\varrho v^2 + h\varrho g = \frac{1}{2}\varrho u^2\,,$$

kde v je rychlost poklesu hladiny v bojleru, u rychlost vody stříkající ze sprchy, ϱ hustota vody, h výška vody v bojleru a g tíhové zrychlení. Jelikož platí $S \gg s$, tak také díky rovnici kontinuity platí $v \ll u$, a proto člen s v v Bernoulliho rovnici zanedbáváme.

Odtud vyjádříme rychlost v jako

$$v = \frac{s}{S}\sqrt{2gh}\,.$$

Nyní můžeme spočítat limitní výšku vody v bojleru ze vztahu

$$Q_0 = Sv_0 = s\sqrt{2gh_0}\,,$$

čímž dostáváme

$$h_0 = \frac{Q_0^2}{2gs^2} \doteq 32\,\mathrm{cm}\,.$$

Nyní musíme vyřešit diferenciální rovnici

$$-\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = v = \frac{s}{S}\sqrt{2gh}\,,$$

což uděláme následovně

$$\frac{s}{S}\sqrt{2g}\int_0^t \mathrm{d}t = -\int_H^{h_0} \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}} = 2\left(\sqrt{H} - \sqrt{h_0}\right)\,,$$
$$t = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{H} - \sqrt{h_0}\right) = 50\,\mathrm{min}\,.$$

Z bojleru se tedy můžeme sprchovat celých 50 minut. Ve skutečnosti se navíc voda z bojleru ředí přibližně půl na půl se studenou vodou z kohoutku, což nám dává dokonce hodinu a půl (při vhodném technickém řešení).

Jakub Dolejší
`dolejsi@fykos.cz`

Úloha FoL.44 ... vesmírný závod

*Ve vesmírném závodu odstartovaly dvě lodě, USS Alenka a USS Boženka. Obě se blíží do cíle svými maximálními rychlostmi, $v_{\mathrm{A}} = c/4$ a $v_{\mathrm{B}} = c/2$. Z pozice pozorovatele stojícího v cíli vidíme Boženku ve vzdálenosti $d_{\mathrm{B}} = 250\,\mathrm{km}$ a Alenku ve vzdálenosti $d_{\mathrm{A}} = 100\,\mathrm{km}$. Určete rozdíl časů, za které dle tohoto pozorovatele lodě dorazí do cíle (kladné číslo) v **milisekundách**.*

Pořadí v závodech je podle Mirka relativní.

Ve chvíli, kdy vidíme Alenku ve vzdálenosti d_{A}, je už loď ve skutečnosti blíže, protože světelný signál k nám dorazil se zpožděním. Dobu cesty signálu označme t, skutečnou vzdálenost Alenky do cíle d'_{A}. Signál putoval po dobu

$$t = \frac{d_{\mathrm{A}}}{c}\,,$$

skutečná vzdálenost je tedy

$$d'_{\mathrm{A}} = d_{\mathrm{A}} - v_{\mathrm{A}} t = d_{\mathrm{A}} \left(1 - \frac{v_{\mathrm{A}}}{c}\right)\,.$$

Podobně najdeme skutečnou vzdálenost Boženky

$$d'_{\mathrm{B}} = d_{\mathrm{B}} - v_{\mathrm{B}} t = d_{\mathrm{B}} \left(1 - \frac{v_{\mathrm{B}}}{c}\right)\,.$$

Rozdíl cílových časů obou lodí tedy bude

$$|t_{\mathrm{A}} - t_{\mathrm{B}}| = \left|\frac{d'_{\mathrm{A}}}{v_{\mathrm{A}}} - \frac{d'_{\mathrm{B}}}{v_{\mathrm{B}}}\right| = \left|\frac{d_{\mathrm{A}}}{v_{\mathrm{A}}}\left(1 - \frac{v_{\mathrm{A}}}{c}\right) - \frac{d_{\mathrm{B}}}{v_{\mathrm{B}}}\left(1 - \frac{v_{\mathrm{B}}}{c}\right)\right|\,.$$

Po číselném dosazení dostaneme výsledek $|t_{\mathrm{A}} - t_{\mathrm{B}}| \doteq 0{,}167\,\mathrm{ms}$, přičemž do cíle dorazila jako první USS Boženka.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.45 ... šedé plátky

Máme dvě rovnoběžné nekonečné roviny ve vakuu. První je udržovaná na teplotě $T_1 = 200\,\mathrm{K}$ a má reflektivitu $R_1 = 1/2$ (poměr odražené a dopadlé intenzity světla). Druhá je udržovaná na teplotě $T_2 = 300\,\mathrm{K}$ a má reflektivitu $R_2 = 1/3$. Na jaké teplotě T se ustálí třetí rovina o reflektivitě $R = 1/3$, kterou umístíme rovnoběžně někam mezi ně?

Uvažujte, že roviny vyzařují jako černé těleso (mají jednotkovou emisivitu) a dopadající světlo navíc částečně odráží. Transmisivita všech těles je nulová.

Kuba chtěl vědět, jak chladí odraz světla.

Vyzářený paprsek se bude mezi dvěma sousedními rovinami vždy částečně odrážet a částečně absorbovat. Z toho důvodu se část vyzářené energie dané rovině vrátí zpět. Musíme tedy spočítat, jaká část energie skutečně přejde na druhou rovinu.

Jestliže rovina R vyzáří paprsek intenzity I směrem k rovině R_1, tak se od ní odrazí paprsek o intenzitě $R_1 I$, což znamená, že rovina R_1 absorbovala $(1 - R_1)I$. Odražený paprsek se opět odrazí od roviny R, čímž se dostáváme do počáteční situace, ale namísto intenzity I máme tentokrát intenzitu $R_1 R I$. Jestliže budeme pokračovat dále a postup opakovat, získáme geometrickou řadu pro intenzitu absorbovanou na rovině R_1 ve tvaru

$$I_1 = \sum_{k=0}^{\infty} I (R R_1)^k (1 - R_1) = I \frac{1 - R_1}{1 - R R_1} .$$

Doplněk této intenzity $I - I_1$ se přesně rovná intenzitě, kterou absorbovala rovina R.

Tímto už máme veškerou informaci o předávání energie mezi všemi rovinami. Záměnou R_1 za R_2 dostáváme vztah pro intenzitu předanou rovinou R rovině R_2 a záměnou R_i za R bychom získali vztah pro intenzitu předanou rovinou R_i rovině R.

V ustáleném stavu platí, že celková vyzářená energie se rovná energii přijaté. To platí i pro vyzářený a přijatý výkon, a tedy intenzitu vyměněných záření. Po úpravě Stefanova-Boltzmannova zákona o koeficient daný jednotlivými odrazy mezi rovinami můžeme psát zákon zachování energie

$$\sigma T^4 \left(\frac{1 - R_1}{1 - R R_1} + \frac{1 - R_2}{1 - R R_2} \right) = \sigma T_1^4 \frac{1 - R}{1 - R R_1} + \sigma T_2^4 \frac{1 - R}{1 - R R_2} .$$

Po dosazení za jednotlivé koeficienty odrazivosti dostáváme řešení

$$T = \sqrt[4]{\frac{16 T_1^4 + 15 T_2^4}{27}} \doteq 272\,\mathrm{K} .$$

Výsledek nám říká, že pokud by platilo $T_1 = T_2$,výsledné T by pak bylo vyšší. To je dané asymetrií mezi rovinami R a R_1, kde energie teče převážně směrem k rovině R. To platí jak pro energii vyzářenou rovinou R_1, tak rovinou R. Je to však proti fyzikální intuici a vypovídá to o tom, že emisivita šedého tělesa je ve skutečnosti menší než jednotková.

Jakub Dolejší
`dolejsi@fykos.cz`

Úloha FoL.46 ... neutop se!

V řece o šířce $d = 20\,\mathrm{m}$ teče voda s parabolickým profilem rychlosti. To znamená, že ve vzdálenosti y od břehu je rychlost proudu $v(y) = 4v_0 \frac{y}{d}\left(1 - \frac{y}{d}\right)$, kde $v_0 = 1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ je rychlost řeky ve středu toku. Hloubkový profil rychlosti je konstantní. Za jak dlouho přeplave plavec řeku napříč, pokud se chce držet na nejkratší spojnici s protějším břehem. Vůči stojící vodě plave konstantní rychlostí $w = 2v_0$. *Kubu unášel proud.*

Aby se plavec držel na dané trase, musí plavat částečně proti proudu řeky. Označme si jako α úhel mezi směrem jeho rychlosti (vzhledem ke břehu) a kolmou spojnicí břehů. Směr plavcovy rychlosti v poloze y je dán rovnicí

$$w \sin\alpha = v(y) = 4v_0 \frac{y}{d} \left(1 - \frac{y}{d}\right) .$$

Pohyb plavce napříč řekou je popsán diferenciální rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = w\cos\alpha = w\sqrt{1 - \left[\frac{4v_0}{w}\frac{y}{d}\left(1 - \frac{y}{d}\right)\right]^2}\,,$$

kde jsme dosadili za $\cos\alpha$ z předchozí rovnice s využitím vztahu $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Řešením této diferenciální rovnice dostáváme vztah pro dobu τ, za kterou se plavec dostane na druhý břeh. Do vztahu jsme dosadili $w = 2v_0$ a v integrálu provedli substituci $\psi = y/d$,

$$\tau = \frac{1}{w}\int\limits_0^d \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1 - \left[\frac{4v_0}{w}\frac{y}{d}\left(1 - \frac{y}{d}\right)\right]^2}} = \frac{d}{w}\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1 - 4\psi^2\left(1 - \psi\right)^2}} \doteq 1{,}078\frac{d}{w} \doteq 10{,}8\,\mathrm{s}\,.$$

Jelikož řešení daného integrálu vede na eliptický integrál, bylo třeba ho vyřešit numericky. Vidíme, že výsledná hodnota se liší pouze o necelých 0,8 s oproti plavání přes klidnou řeku.

Jakub Dolejší
`dolejsi@fykos.cz`

Úloha FoL.47 ... přetlak

Tlakový hrnec je uzavřená nádoba se stěnami tloušťky $t = 5\,\mathrm{mm}$, tepelnou vodivostí $\lambda = 9\,\mathrm{W{\cdot}m^{-1}{\cdot}K^{-1}}$, objemem $V = 3\,\mathrm{l}$ a povrchem $S = 4\,\mathrm{dm}^2$, ve kterém je kruhová díra s průměrem $d = 4\,\mathrm{mm}$. Hrnec postavíme na oheň o tepelném výkonu $P = 7\,\mathrm{kW}$, nalijeme do něho $V_\mathrm{v} = 1\,\mathrm{l}$ vody a zahřejeme ji na bod varu. Pokojová teplota je $T_\mathrm{i} = 20\,^\circ\mathrm{C}$. Zanedbejte závislost teploty varu vody na tlaku. O kolik se zvýší tlak v hrnci oproti atmosférickému?

Xellos umí vařit… čaj.

Predpokladajme, že sústava hrniec+para je v takej tepelnej rovnováhe, že všetok výkon P sa spotrebuje na tepelné straty do okolia a vyparovanie vody v hrnci. Ak je hrniec s vodou na teplote varu $T = 100\,^\circ\mathrm{C}$, výkon unikajúci do okolia hrnca je

$$P_\mathrm{e} = \frac{\lambda S}{t}(T - T_\mathrm{i})\,,$$

teda voda sa vyparuje rýchlosťou

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{l}\left(P - \frac{\lambda S}{t}(T - T_\mathrm{i})\right)\,,$$

kde $l \doteq 2{,}26\,\mathrm{MJ{\cdot}kg^{-1}}$ je merné skupenské teplo vody. Keďže objem pary je oveľa väčší ako objem vody rovnakej hmotnosti, musí približne rovnaká hmotnosť vody za čas uniknúť z hrnca dierou; z toho plynie rýchlosť prúdenia pary dierou

$$v = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau}\frac{1}{\varrho}\frac{4}{\pi d^2}\,.$$

Túto rýchlosť môžeme spojiť so zmenou tlaku z Bernoulliho rovnice

$$\Delta p = \frac{1}{2}\varrho v^2\,.$$

Hustota pary ϱ pri teplote T je daná stavovou rovnicou ideálneho plynu ako

$$\varrho = \frac{Mp}{RT}\,,$$

kde $M = 18\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$ je molová hmotnosť vody a p jej tlak (predpokladajme, že pretlak je dostatočne malý, a teda p je približne atmosférický tlak). Spolu dostávame

$$\Delta p = \frac{RT}{Mp}\frac{8}{\pi^2 d^4 l^2}\left(P - \frac{\lambda S}{t}(T - T_\mathrm{i})\right)^2 \doteq 1{,}6\,\mathrm{kPa}\,.$$

Predpoklad $T = 100\,^\circ\mathrm{C}$ nie je úplne správny, lebo teplota varu závisí na tlaku. Vidíme ale, že to dalo $\Delta p \ll p$, takže skutočná teplota varu bude blízko normálnej a výsledok približne platí.

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

Úloha FoL.48 ... třináct barelů

Mějme vzduchotěsnou nádrž o známém objemu obsahující plyn o známém tlaku. Také máme barel o objemu jedné třináctiny nádrže. Barel nejdříve připojíme ke zdroji (který poskytuje plyn s konstantním tlakem) a počkáme než se tlak v barelu ustálí. Následně ho odpojíme, připojíme k nádrži a opět počkáme na ustálení tlaků. Nakonec barel od nádrže odpojíme. Jaký musí být poměr tlaku ve zdroji a původního tlaku v nádrži, chceme-li celý proces provést právě třináctkrát tak, abychom tím zvýšili tlak v nádrži na třináctinásobek jeho původní hodnoty? Předpokládejte, že okolí je v tepelném kontaktu s nádrží i barelem a jeho teplota je konstantní.

Napadla Jáchyma v pátek třináctého.

Po připojení barelu o objemu V_b ke zdroji se v něm tlak ustálí na hodnotě tlaku zdroje, tedy p_z. V nádrži o objemu V_n máme plyn o tlaku p_0. Po připojení barelu k nádrži se tlak v obou nádobách ustálí na hodnotě p_1. Jelikož teplota při všech dějích zůstává konstantní, ze stavové rovnice vyplývá

$$p_1\left(V_\mathrm{b} + V_\mathrm{n}\right) = p_\mathrm{z}V_\mathrm{b} + p_0 V_\mathrm{n}\,.$$

Tento výraz můžeme upravit na tvar $p_1 = k\,p_0 + (1-k)\,p_\mathrm{z}$, kde jsme využili substituci

$$k = \frac{V_\mathrm{n}}{V_\mathrm{n} + V_\mathrm{b}}\,. \tag{3}$$

Získali jsme rovnici popisující změnu tlaku v nádrži po jednom připojení a odpojení barelu. Pokud celý proces provedeme celkem n-krát, tlak v nádrži bude mít hodnotu

$$p_\mathrm{n} = k^n p_0 + (1-k)\,p_\mathrm{z}\sum_{i=1}^{n} k^{i-1} = k^n p_0 + (1-k)\,p_\mathrm{z}\frac{k^n - 1}{k - 1} = k^n p_0 + (1 - k^n)\,p_\mathrm{z}\,.$$

Pro poměr tlaků p_z a p_0 potom platí

$$\frac{p_\mathrm{z}}{p_0} = \frac{\frac{p_\mathrm{n}}{p_0} - k^n}{1 - k^n}\,.$$

Pokud nyní za n dosadíme 13, za k dosadíme z (3) a za V_n a p_{13} dosadíme ze zadání $V_\mathrm{n} = 13V_\mathrm{b}$ a $p_{13} = 13p_0$, dostaneme výsledek ve tvaru

$$\frac{p_\mathrm{z}}{p_0} = \frac{13 - \left(\frac{13}{14}\right)^{13}}{1 - \left(\frac{13}{14}\right)^{13}}\,.$$

Číselně pak máme $p_\mathrm{z}/p_0 \doteq 20{,}40$.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FoL.49 ... vesmírný kovboj

Ve volném vesmíru se vznáší kosmonaut s ručním dělem. Jedná se o futuristickou zbraň, která při výstřelu udělí projektilu kinetickou energii $E_\mathrm{k} = 1 \cdot 10^{17}$ J (měřeno v soustavě, kde je těžiště zbraně a projektilu v klidu). Nalezněte rychlost, kterou se bude projektil od kosmonauta po výstřelu vzdalovat (v soustavě spojené s kosmonautem). Hmotnost kosmonauta s dělem je $m_1 = 100\,\mathrm{kg}$, hmotnost projektilu je $m_2 = 10\,\mathrm{kg}$. Úbytek hmotnosti střeliva ani rotace objektů v úloze neuvažujte. ***Výsledek zapište v násobcích rychlosti světla (v jednotkách c).***

Mirek se smířil s palnými zbraněmi ve vakuu.

Sledujme dění z těžišťové soustavy, v níž je kosmonaut na počátku v klidu. Kinetická energie projektilu po výstřelu je

$$E_\mathrm{k} = \sqrt{m_2^2 c^4 + p_2^2 c^2} - m_2 c^2\,.$$

Dále vyjádříme hybnost projektilu

$$p_2 = \frac{\sqrt{E_\mathrm{k}^2 + 2E_\mathrm{k} m_2 c^2}}{c}\,.$$

V úloze se nezachovává energie, ale hybnost ano, platí tedy $\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2$. Hybnost lze obecně vyjádřit také ve tvaru $\boldsymbol{p}_i = \gamma_i m_i \boldsymbol{v}_i$, kde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}}\,.$$

Pro rychlost projektilu tedy máme rovnici

$$\frac{\sqrt{E_\mathrm{k}^2 + 2E_\mathrm{k} m_2 c^2}}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} m_2 v_2\,. \tag{4}$$

Postupnými úpravami vyjádříme rychlost projektilu ve tvaru

$$v_2 = c\frac{\sqrt{\varepsilon^2 + 2\varepsilon}}{1 + \varepsilon}\,,$$

kde $\varepsilon = E_\mathrm{k}/(m_2c^2)$ je poměr kinetické a klidové energie projektilu. Pro výpočet rychlosti kosmonauta použijeme opět rovnici (4), pouze změníme indexy na pravé straně z 2 na 1 (a pamatujeme na znaménko – kosmonaut se pohybuje opačným směrem než projektil). Úpravami dospějeme k výrazu

$$v_1 = c\sqrt{\frac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon}{\mu^2 + 2\varepsilon + \varepsilon^2}}\,,$$

kde $\mu = m_1/m_2$.

Nyní zbývá správně sečíst rychlosti. Náš pozorovatel se vůči kosmonautovi pohybuje rychlostí v_1, projektil vůči pozorovateli se pohybuje rychlostí v_2. Z pohledu kosmonauta se tedy projektil bude podle pravidel speciální relativity pohybovat rychlostí

$$u_2 = \frac{v_2 + v_1}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}\,.$$

Po dosazení výrazů výše a vyčíslení dostaneme $u_2 \doteq 0{,}4743c$.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FoL.50 ... přetlak reloaded

Tlakový hrnec je uzavřená nádoba se stěnami tloušťky $t = 5\,\mathrm{mm}$, tepelnou vodivostí $\lambda = 9\,\mathrm{W{\cdot}m^{-1}{\cdot}K^{-1}}$, objemem $V = 3\,\mathrm{l}$ a povrchem $S = 4\,\mathrm{dm^2}$, ve kterém je kruhová díra s průměrem $d = 4\,\mathrm{mm}$. Hrnec postavíme na oheň o tepelném výkonu $P = 7\,\mathrm{kW}$, nalijeme do něho $V_\mathrm{v} = 1\,\mathrm{l}$ vody a zahřejeme ji na bod varu. Pokojová teplota je $T_\mathrm{i} = 20\,\mathrm{^\circ C}$. O kolik stupňů Celsia bude teplota varu vyšší než za normálních podmínek? Předpokládejte, že při atmosférickém tlaku (v otevřeném hrnci) voda vře přesně při $100\,\mathrm{^\circ C}$. *Xellos umí vařit... čaj.*

Vyjdeme z výsledku predošlej verzie tejto úlohy: tlak v hrnci je daný vzťahom

$$p = p_\mathrm{a} + \frac{RT}{Mp}\frac{8}{\pi^2 d^4 l^2}\left(P - \frac{\lambda S}{t}(T - T_\mathrm{i})\right)^2\,.$$

Zatiaľ nepoznáme ani tlak, ani teplotu v hrnci. Tlak závisí na teplote varu podľa Clausius-Clapeyronovej rovnice

$$p = p_\mathrm{a}\exp\left(-\frac{L}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_\mathrm{v}}\right)\right)\,,$$

kde $T_\mathrm{v} = 100\,\mathrm{^\circ C}$ je teplota varu pri atm. tlaku a $L = lM$ je molové merné skupenské teplo vyparovania vody. To by sme mohli dosadiť, ale vznikla by nepekná rovnica, z ktorej nič rozumné nedostaneme inak ako numericky. Môžeme ale využiť, že v hrnci nebude žiadny extrémny tlak a teda teplota varu sa zrejme výrazne nezmení. Označme $\Delta T = T - T_\mathrm{v}$ a aproximujme

$$\frac{p}{p_\mathrm{a}} \approx 1 - \frac{L}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_\mathrm{v}}\right) \approx 1 + \frac{L}{R}\frac{\Delta T}{T_\mathrm{v}^2}\,,$$

$$\frac{lM}{R}\frac{\Delta T}{T_\mathrm{v}^2} \approx \frac{8RT_\mathrm{v}}{\pi^2 d^4 l^2 M p_\mathrm{a}}\left(P - \frac{\lambda S}{t}(T_\mathrm{v} - T_\mathrm{i})\right)^2\,,$$

$$\Delta T \approx \frac{8R^2T_\mathrm{v}^3}{\pi^2 d^4 l^3 M^2 p_\mathrm{a}^2}\left(P - \frac{\lambda S}{t}(T_\mathrm{v} - T_\mathrm{i})\right)^2\,.$$

Použili sme aproximácie $T \approx T_\mathrm{v}$, $p \approx p_\mathrm{a}$. Z toho dostaneme $\Delta T \doteq 0{,}46\,^\circ\mathrm{C}$ – vidíme, že predpoklad teploty varu blízkej normálnej, platí. Keďže zmena je veľmi malá, k takmer rovnakému výsledku ($0{,}45\,^\circ\mathrm{C}$) by sme sa dostali aj priamo použitím pretlaku určeného v predošlej úlohe a Clausius-Clapeyronovej rovnice.

Jakub Šafin
`xellos@fykos.cz`

Úloha FoL.51 ... gule

Vložili jsme 2 vodivé koule o poloměrech $R_1 = 0{,}1\,\mathrm{m}$ a $R_2 = 0{,}2\,\mathrm{m}$ do homogenního elektrického pole $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_z$, kde $E = 50\,\mathrm{kV{\cdot}m^{-1}}$. Sférické souřadnice druhé koule vůči středu té první jsou (r, ϑ, φ), kde vektor příslušící úhlu $\vartheta = 0$ má směr kladné osy z a $0 \le \varphi < 360^\circ$. Najděte sílu, která působí mezi koulemi pro $R_{1,2} \ll r = 5\,\mathrm{m}$, $\vartheta = 30^\circ$, $\varphi = 50^\circ$.

Xellos chcel spravit ulohu, ktora ma gule.

Pozrime sa najprv len na jednu guľu s polomerom R v homogénnom poli. Guľa je vodivá, na jej povrchu sa preto indukuje náboj tak, aby bol výsledný potenciál konštantný. V tomto prípade to znamená, že potenciál samotného náboja na guli musí závisieť na z lineárne.

Túto podmienku spĺňa potenciál dipólu: ak je dipól tvorený nábojmi $\pm q$ umiestnenými pozdĺž osi z symetricky voči stredu gule vo vzdialenosti $d \ll R$ od seba, potenciál bude

$$V_\mathrm{i}(\boldsymbol{r}) \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{r^2 + zd}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 - zd}}\right) \approx \frac{qzd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,.$$

Na povrchu gule s polomerom R je $r = R$; potenciál vonkajšieho poľa je $V_\mathrm{e} = -Ez$ (plus konštanta), teda potrebujeme moment

$$p = qd = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E\,.$$

Keď máme 2 gule, normálne by sme museli uvažovať okrem indukcie sposôbenej homogénnym poľom aj to, že pole jednej gule bude ovplyvňovať pole, ktoré cíti druhá, a tým zmení indukovaný náboj na povrchu. Tu pracujeme v priblížení, kedy sú gule tak ďaleko od seba, že je tento efekt zanedbateľný.

Stačí teda nájsť silu, ktorou na seba pôsobia náboje indukované v homogénnom poli; tá je rovnaká ako sila medzi dipólmi, ktorými popisujeme indukované pole. To je vidieť z toho, že zámena povrchového náboja za dipól v guli 1 nezmení pole pôsobiace na guľu 2 a sila, ktorou pôsobí dipól gule 1 na guľu 2, je rovná sile, ktorou pôsobí pole náboja gule 2 na dipól gule 1; náboj gule 2 potom môžeme tiež zameniť za dipól bez zmeny poľa.

Výsledná sila nezávisí na súradnici φ zo symetrie, na tú môžeme zabudnúť. Teraz máme 2 dipóly s dipólovými momentmi

$$\boldsymbol{p}_{1,2} = q_{1,2} d_{1,2} \boldsymbol{e}_z = 4\pi\varepsilon_0 R_{1,2}^3 E\,.$$

Sila medzi takými dipólmi je známa:[1]

$$\boldsymbol{F} = \frac{3}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\left((\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{p}_2 + (\boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{p}_1 + (\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{r} - 5\frac{(\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{r})}{r^2}\boldsymbol{r}\right)\,.$$

[1] Odvodenie nie je ťažké, ale je pracné. Pre magnetické dipóly je vzorec k nájdeniu napr. na Wikipédii `https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetic_dipole#Forces_between_two_magnetic_dipoles`, pre elektrické dipóly získame správny vzorček zámenou $\boldsymbol{m} \leftrightarrow \boldsymbol{p}$ a $\mu_0 \leftrightarrow 1/\varepsilon_0$.

Keďže $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ sú v smere osi z a $z = r\cos\vartheta$, dostaneme

$$\boldsymbol{F} = \frac{3p_1p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\left(2r\cos\vartheta\boldsymbol{e}_z + (1 - 5\cos^2\vartheta)\boldsymbol{r}\right) .$$

Výraz v zátvorke má zložku kolmú na os z rovnú $(1 - 5\cos^2\vartheta)r\sin\vartheta$ a z-ovú zložku rovnú $(3 - 5\cos^2\vartheta)r\cos\vartheta$. Jeho abs. hodnota je z Pytagorovej vety

$$r\sqrt{1 + 5\cos^4\vartheta - 2\cos^2\vartheta} = r\sqrt{\sin^4\vartheta + 4\cos^4\vartheta}$$

a výsledná sila je teda

$$F = \frac{3p_1p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\sqrt{\sin^4\vartheta + 4\cos^4\vartheta} = \frac{12\pi\varepsilon_0 R_1^3R_2^3E^2}{r^4}\sqrt{\sin^4\vartheta + 4\cos^4\vartheta} \doteq 1{,}62\cdot 10^{-8}\,\mathrm{N}\,.$$

Môžeme sa ľahko presvedčiť, že pole klesá s r tak rýchlo, že pre $r \gg R_1, R_2$ je indukcia náboja na jednej guli spôsobená poľom druhej skutočne zanedbateľná. Pole indukovaného dipólu gule 2 je vo vzdialenosti r slabšie ako homogénne pole v pomere približne $(R_2/r)^3 < 1\cdot 10^{-4}$, podobne pre guľu 1.

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

Úloha M.1 ... tikavá

Kolikrát větší dráhu urazí za 1 den (tedy přesně 24 hodin) konec vteřinové ručičky oproti konci minutové ručičky na hodinách? Vteřinová ručička má délku 105 mm, *minutová* 100 mm.

Kiki zabíjela čas.

Pro obvodovou dráhu s platí vztah $s = r\varphi$, kde r je poloměr a φ je úhel v radiánech. Plný úhel představuje 2π. Podívejme se tedy na to, kolikrát která ručička za den urazí plný úhel. Vteřinová jej urazí jednou za minutu, za celý den tedy 1 440. Minutová pak urazí 24 plných úhlů za den. Jelikož se ptáme na poměr obvodových drah, 2π se ve výrazu zkrátí a výsledek bude mít tvar

$$x = \frac{1\,440 r_1}{24 r_2}\,.$$

Číselně tedy dostaneme $x = 63$. Naše konkrétní vteřinová ručička tedy za den oběhne ciferník hodin 63vícekrát než daná minutová.

Kristína Nešporová
kiki@fykos.cz

Úloha M.2 ... daleko do školy

Luboš i Náry vyrazili ve stejný čas od koleje do školy, která je vzdálená $l = 350\,\mathrm{m}$. *Luboš chodí poměrně rychle,* $v_\mathrm{L} = 2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, *ale stále něco zapomíná. Než došel do školy, musel se třikrát vrátit, a to postupně ze vzdáleností* 100 m, 200 m *a* 300 m. *Vyřídit věci na koleji mu trvá* $t_\mathrm{L} = 1\,\mathrm{min}$. *Náry chodí stejnou rychlostí jako Luboš,* $v_\mathrm{N} = v_\mathrm{L}$, *ale pro zapomenuté věci se nevrací. Má však ještě jeden nešvar, a sice že se neustále s někým zakecává. Předpokládejme, že po každých* 50 m *(včetně místa u dveří koleje a u dveří fakulty) někoho potká a mluví s ním* *po dobu $t_\mathrm{N} = 1{,}5\,\mathrm{min}$, přičemž stojí na místě. O kolik sekund dorazí Luboš do školy dříve? Dorazí-li později, uveďte výsledek jako záporné číslo.* *Mirek počítal, kolikrát se Luboš vrátí.*

Luboš třikrát vyřizuje věci na koleji, každý z úseků po stech metrech ujde dvakrát (tam, zpět) a nakonec ujde celou trasu. Celkem tedy trvá jeho cesta do školy

$$T_\mathrm{L} = 3t_\mathrm{L} + \frac{2}{v_\mathrm{L}}\left(100\,\mathrm{m} + 200\,\mathrm{m} + 300\,\mathrm{m}\right) + \frac{350\,\mathrm{m}}{v_\mathrm{L}} \doteq 955\,\mathrm{s}\,.$$

Náry má cestu jednodušší, pouze se osmkrát zakecá, jinak jde přímo, takže

$$T_\mathrm{N} = 8t_\mathrm{N} + \frac{350\,\mathrm{m}}{v_\mathrm{N}} \doteq 895\,\mathrm{s}\,.$$

Rozdíl časů je $T_\mathrm{N} - T_\mathrm{L} \doteq -60\,\mathrm{s}$, Luboš tedy dorazí o minutu později než Náry.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha M.3 ... nevolný pád

Ve válcové sklenici s podstavou o poloměru $R = 5\,\mathrm{cm}$ je nalito víc vody, než je její objem tak, že je vodní hladina ve středu o $h = 4\,\mathrm{mm}$ nad hranou sklenice. Ve vzdálenosti $r = 2\,\mathrm{mm}$ od středu se utopila moucha. Určete rychlost mouchy na okraji sklenice, pokud se na začátku nehýbe. Sklon hladiny blízko středu sklenice považujte za velmi malý a odporové síly zanedbejte. Povrchové napětí vody je $\sigma = 72\,\mathrm{mN{\cdot}m^{-1}}$. *Xellos pil pivo.*

Úloha je jednoduchá, stačí použiť zákon zachovania energie - rýchlosť nezávisí na tvare pohybu, ale len na prekonanom výškovom rozdieli Δh podľa vzťahu

$$v = \sqrt{2g\Delta h}\,.$$

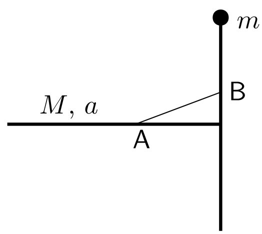
Ak hladinu blízko stredu pohára považujeme za rovnú, môžeme povedať, že na začiatku je mucha vo výške h nad hranou pohára; na konci je táto výška 0, takže $\Delta h = h$ a $v \approx \sqrt{2gh} = 0{,}28\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

Úloha M.4 ... nepadej vůbec

Na obrázku (pohled shora) vidíte konstrukci sestávající ze dvou homogenních svařených tyčí, z nichž každá má délku a a hmotnost M. Na konci jedné z tyčí je připevněno malé závaží o hmotnosti $m = M/4$. Ke konstrukci jsme přivařili další homogenní tyč (tenká čára v obrázku) tak, aby její těžiště bylo shodné s těžištěm původní konstrukce. Najděte délku této nové tyče (v obrázku vzdálenost |AB|) a výsledek udejte v násobcích a.

Mirek byl nespokojený, protože si nemohl sáhnout na těžiště.



Nejprve nalezneme souřadnice těžiště T soustavy

$$x_{\mathrm{T}} = \frac{M\frac{a}{2} + Ma + \frac{M}{4}a}{\frac{9}{4}M} = \frac{7}{9}a\,,$$

$$y_{\mathrm{T}} = \frac{\frac{M}{4}\frac{a}{2}}{\frac{9}{4}M} = \frac{1}{18}a\,,$$

přičemž jsme počátek umístili do levého konce vodorovné tyče. Novou tyč musíme přivařit tak, aby vzdálenost bodů A, B od těžiště byla shodná. Tedy

$$|AB| = \sqrt{\left(2(a - x_{\mathrm{T}})\right)^2 + (2y_{\mathrm{T}})^2} = \frac{\sqrt{17}}{9}a\,.$$

V násobcích a je tedy délka nové tyče zhruba 0,46.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha E.1 ... lámání kondenzátoru

Mějme kondenzátor, který je tvořen dvěma oddělenými vodivými deskami. Ten nabijme a odpojme od napětí. Kolikrát větší náboj získáme z kondenzátoru, pokud jej zlomíme na 4 stejné kusy a části položíme bez otáčení na sebe? *Štěpán lámal kousky čokolády.*

Označme si kapacitu původního kondenzátoru jako C_0 a napětí na něm U. Při rozdělení na 4 stejné kusy dostaneme kondenzátory se čtvrtinovou kapacitou (neboť se jejich povrch zmenší), na nichž je stále stejné napětí U.

Sériovým složením dostaneme celkovou kapacitu $C_0/16$ (můžete si sami ověřit) a napětí bude 4 krát větší.

Celkový náboj můžeme spočíst jako

$$Q = 4U\frac{1}{16}C_0 = \frac{1}{4}UC_0 = \frac{1}{4}Q_0\,.$$

Náboj tedy bude 4krát menší.

Obdobně lze k výsledku dojít přes energii kondenzátorů, která se samozřejmě zachovává.

Dodejme, že celou úlohu lze řešit jednodušeji. Stačí si uvědomit, že po rozlomení budou mít desky pouze čtvrtinový náboj, tedy i celkový náboj získaný z kondenzátoru bude čtvrtinový.

Štěpán Stenchlák
`stenchlak@fykos.cz`

Úloha E.2 ... dokonalé napětí

Mějme ideální zdroj elektrického napětí. Nejprve k němu připojíme tři stejné rezistory paralelně vzhledem ke zdroji a zjistíme, že celkový výkon sečtený přes všechny rezistory je P. Jaký výkon naměříme, jestliže rezistory zapojíme sériově? Výsledek udejte v násobku P.

Karel učil elektrické napětí.

Při paralelním zapojení rezistorů o stejném odporu R je celkový odpor v obvodu roven $R/3$. Při sériovém zapojení je to ale $3R$ (můžete si sami ověřit). Při počítání výkonu paralelně zapojených rezistorů P vyjdeme ze známého vzorečku a Ohmova zákona. Dostaneme

$$P = UI = \frac{U^2}{R_c} = \frac{3U^2}{R}\,,$$

kde I je protékající proud, U je napětí a R_c je celkový odpor v obvodu. Při počítání výkonu sériově zapojených rezistorů P' budeme postupovat obdobně

$$P' = UI = \frac{U^2}{R_c} = \frac{U^2}{3R}\,.$$

Nyní už prostým vydělením zjistíme, že $P' = \frac{1}{9}P$.

Kateřina Smítalová
`katka@fykos.cz`

Úloha E.3 ... dokonalý proud

Mějme ideální zdroj elektrického proudu. Nejprve k němu připojíme tři stejné rezistory paralelně vzhledem ke zdroji a zjistíme, že celkový výkon sečtený přes všechny rezistory je P. Jaký výkon naměříme, jestliže rezistory zapojíme sériově? Výsledek udejte v násobku P.

Karel učil elektrický proud.

Při paralelním zapojení rezistorů o stejném odporu R je celkový odpor v obvodu roven $R/3$. Při sériovém zapojení je to ale $3R$ (můžete si sami ověřit). Při počítání výkonu paralelně zapojených rezistorů P vyjdeme ze známého vzorečku pro výkon a Ohmova zákona. Dostaneme

$$P = UI = R_c I^2 = \frac{1}{3} R I^2\,,$$

kde I je celkový proud protékající obvodem, U je napětí na zdroji a R_c je celkový odpor v obvodu. Při počítání výkonu sériově zapojených rezistorů P' budeme postupovat obdobně

$$P' = UI = R_c I^2 = 3RI^2\,.$$

Nyní už prostým vydělením zjistíme, že $P' = 9P$.

Kateřina Smítalová
`katka@fykos.cz`

Úloha E.4 ... zatížení trojúhelníku

Postavili jsme si trojúhelník ze tří rezistorů o stejném odporu a na dva z nich jsme připojili paralelně zdroje elektrického napětí tak, aby jejich záporné póly byly na stejném uzlu. Kolikrát větší proud bude protékat zdrojem, jehož napětí je 7U, než druhým, který má napětí 5U?

Štěpán chtěl programovat, ale Kuba ho donutil něco vymyslet.

Nejprve provedeme transformaci trojúhelník-hvězda. Stačí si uvědomit, že všechny odpory jsou stejné, tedy i ve hvězdě budou mít všechny odpory stejnou velikost, kterou si například označíme R.

Nyní můžeme aplikovat Kirchhoffovy zákony. Proud protékající menším zdrojem označme jako I_1. Větším zdrojem teče proud I_2 a zbylým rezistorem teče I_3. Předpokládáme, že proud protéká oběma zdroji standardním směrem (zdroje nenabíjíme). Dostáváme rovnici $I_1+I_2 = I_3$. V případě jiného zaznačení směru, kterým proud protéká, mohou rovnice vyjít jinak. Konečný výsledek ale bude vždy stejný.

Pro první smyčku platí $I_1R + I_3R = 5U$ a pro druhou $I_2R + I_3R = 7U$. Vyřešením těchto tří rovnic o třech neznámých dostaneme $I_2 = 3U/R$ a $I_1 = U/R$, proud procházející větším zdrojem je tedy 3 krát větší.

Štěpán Stenchlák
`stenchlak@fykos.cz`

Úloha X.1 ... čajíček

Mikulášovi někdo do čaje nasypal izotop polonia-210, který má poločas rozpadu 138 dní. *Mikuláš si toho naštěstí včas všiml. Protože měl na čaj opravdu chuť, změřil si celkový obsah radionuklidu v čaji, z čehož spočítal, za jak dlouho aktivita čaje klesne na bezpečnou hodnotu. Po uplynutí této doby, která činila* 342 dní, *si čaj s velikou chutí vypil. O pár let později mu někdo podle nasypal do čaje přesně dvojnásobek stejného izotopu. Jak dlouho (zaokrouhleno na celé dny) musí počkat tentokrát?* *Já ale fakt nejsem bývalý ruský agent...*

Vzpomeneme si na definici poločasu rozpadu. Odtud zjistíme, že pokud počkáme 138 dní, převedeme novou úlohu na úlohu, jejíž řešení už známe. Celkový čas tedy bude $138 + 342 = 480$ dní.

Mikuláš Matoušek
`mikulas@fykos.cz`

Úloha X.2 ... sýrová

Vítek objevil obchod s podezřele levným sýrem. V pondělí ve 14:15 zde koupil 250 g *sýru. V úterý v 17:21 nakoupil navíc* 200 g *a ve středu v 19:45 dokoupil ještě* 160 g. *Tyto kousky vždy pečlivě uschoval v ledničce. Bohužel si nevšiml, že sýr při zakoupení obsahuje radioaktivní nuklid* ^{24}Na *s poločasem rozpadu* 15 hodin. *Hmotnostní zlomek této substance v sýru je v okamžiku koupě* $w = 0{,}0013$. *Jaká bude hmotnost (v gramech) dosud nerozpadlého* ^{24}Na *v sýru ve chvíli, kdy ho chce Vítek sníst, tedy ve čtvrtek v 9:11?* *Jáchym si prohlížel slevové letáky.*

Radioaktivní rozpad probíhá podle rovnice

$$m' = m\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}\ln 2}\,,$$

kde m je počáteční hmotnost izotopu a m' je jeho hmotnost v čase t. Poslední neznámou v rovnici je poločas rozpadu T.

Časový úsek mezi prvním nákupem a snědením sýru označíme t_1, hmotnost koupeného sýru označíme M_1. Pro původní hmotnost izotopu v sýru platí $m_1 = M_1 w$. Pro hmotnost izotopu po uplynutí časového úseku t_1 dostáváme

$$m_1' = m_1\mathrm{e}^{-\frac{t_1}{T}\ln 2} = M_1 w\mathrm{e}^{-\frac{t_1}{T}\ln 2}\,.$$

Obdobně spočítáme i hmotnosti izotopů v dalších dvou kouscích sýru, tedy m_2' a m_3'. Výsledek úlohy získáme součtem jednotlivých hmotností, neboli

$$m_1' + m_2' + m_3' \doteq 0{,}168\,\mathrm{g}\,.$$

Hmotnost dosud nerozpadlého radioaktivního izotopu sodíku je tedy 168 mg.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha X.3 ... jogurtová

Jáchym večeří každý den půlkilogramový jogurt, který obsahuje hmotnostní zlomek $w = 10^{-4}$ radioaktivního izotopu s poločasem rozpadu 26 dní. Kolik gramů izotopu bude mít Jáchym v těle každý den těsně před večeří, pokud se takto stravuje již delší dobu? Jiný způsob úbytku, než je radioaktivní rozpad, neuvažujte. *Jáchym jedl jogurt.*

Těsně před večeří obsahuje Jáchym izotop o hmotnosti m_0. Jogurt obsahuje izotop o hmotnosti $\Delta m = w m_\mathrm{j}$, kde m_j je hmotnost jogurtu. Poté, co Jáchym sní jogurt, se hmotnost obsaženého izotopu zvýší na $m_1 = m_0 + \Delta m$. Během dvaceti čtyř hodin tato hmotnost postupně klesne na původní hodnotu m_0. Můžeme použít rovnici radioaktivního rozpadu

$$m_0 = m_1 \mathrm{e}^{-\lambda t}\,.$$

Dosadíme za m_1 a dostáváme

$$m_0 = (m_0 + \Delta m)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,.$$

Nyní si můžeme vyjádřit m_0 jako

$$m_0 = \Delta m \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}}\,.$$

Časový úsek t má délku jednoho dne a pro rozpadovou konstantu λ platí

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{\frac{1}{2}}}\,,$$

kde $t_{\frac{1}{2}}$ je poločas rozpadu. Po dosazení všech veličin dostáváme výsledek $m_0 \doteq 1{,}85\,\mathrm{g}$.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha X.4 ... jako křen!

Objemový poměr vzduchu a piva v průměrné bublince pivní pěny je 6,87. Poločas rozpadu průměrné bublinky je 73 s. Pokud těsně po načepování sahá pivo do výšky 13 cm ode dna sklenice a pěna sahá do výšky 16,5 cm ode dna sklenice, do jaké výšky (v centimetrech) bude sahat pěna po uplynutí dvou minut?

Napadla Jáchyma při sledování kultovního českého filmu.

Pivo sahá do výšky h_1 a pěna do výšky h_2. Výška samotné pěny na začátku je $h_0 = h_2 - h_1$. Rozpad bublinek bude probíhat stejně jako rozpad radioaktivních prvků. To znamená, že pro výšku pěny v čase t dostáváme

$$h(t) = h_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{T}\ln 2}\,,$$

kde T označuje poločas rozpadu. Vrstva piva, resp. vzduchu, která se uvolní z rozpadlých bublinek, bude mít výšku h_p, resp. h_v. Dostáváme rovnici

$$\begin{aligned} h_\mathrm{p} + h_\mathrm{v} &= h_0 - h\,,\\ 1 + \frac{h_\mathrm{v}}{h_\mathrm{p}} &= \frac{h_0 - h}{h_\mathrm{p}}\,,\\ h_\mathrm{p} &= \frac{h_0 - h}{k+1}\,, \end{aligned}$$

kde $k = h_\mathrm{v}/h_\mathrm{p}$ je zadaný poměr vzduchu a piva v průměrné bublince. Výšku, do které bude sahat pěna ve sklenici, spočítáme jako

$$H = h_1 + h_\mathrm{p} + h = h_1 + (h_2 - h_1)\,\frac{k\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}\ln 2} + 1}{k+1} \doteq 14{,}42\,\mathrm{cm}\,.$$

Pěna bude sahat do výšky 14,42 cm.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://fykos.cz`
e-mail: `fykos@fykos.cz`

FYKOS je také na Facebooku
http://www.facebook.com/Fykos

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.